

Plan de Expansión del Sistema  
Interconectado Nacional  
2018 – 2032

Tomo II  
Plan Indicativo de Generación

**Tomo II - Anexo 8**

Metodología de los Modelos  
OPTGEN y SDDP

# OptGen

## Manual de Metodología

### VERSIÓN 7.2

**PSR**

## Tabla de Contenido

1	Introducción .....	1
2	Descripción del Problema de Expansión.....	2
2.1	Objetivo .....	2
2.2	Formulación simplificada del problema.....	2
3	Estrategia de Solución .....	5
3.1	Planteamiento del problema.....	5
3.2	Características de la función $w\mathbf{x}$ .....	6
3.3	Cálculo del problema de inversión aproximado .....	8
3.4	Algoritmo de descomposición .....	8
3.5	Interpretación geométrica del algoritmo.....	9
3.6	Expresión alternativa para el problema aproximado de inversión .....	10
3.7	Aplicación al problema de planeamiento de la expansión .....	10
4	Criterio de Valor Esperado.....	13
5	Detalles de la formulación del problema.....	15
5.1	Problema de Inversión.....	15
5.2	Problema de operación.....	18
6	Características adicionales del modelo .....	21
6.1	Costo de Inversión.....	21
6.2	Costo operativo.....	22
6.3	Referencia de costo marginal .....	23
6.1	Costo promedio de largo plazo .....	23
6.2	Costo marginal de largo plazo.....	23

## 1 INTRODUCCIÓN

Este informe presenta la descripción de la metodología asociada al modelo OptGen, herramienta computacional para la planificación de la expansión de la generación y transporte de sistemas de energía.

En el capítulo 2 se plantea el problema de expansión. En el capítulo 3 se presenta la teoría de la metodología de solución utilizada, basada en la técnica de descomposición. A continuación, en el capítulo 4, se extienden los conceptos de la metodología para el caso estocástico. El capítulo 5 presenta la formulación detallada de los problemas de inversión y operación y, por último, en el capítulo 6, se describen algunos aspectos adicionales del modelo.

En este documento las variables de cada ecuación son descritas en tablas con tres columnas:

Nombre	Descripción	Unidad
ej. $x_t(i)$	ej. decisión de inversión del proyecto $i$ en etapa $t$	%

## 2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE EXPANSIÓN

### 2.1 Objetivo

El proceso de planificación de la expansión tiene como objetivo seleccionar, a lo largo de un horizonte de tiempo, las mejores unidades generadoras y rutas de distribución de la energía producida para el suministro de la demanda. Este proceso de decisión origina un problema de optimización de gran porte que busca encontrar, entre todas las alternativas disponibles, la solución más económica que tiene en cuenta las incertidumbres del sistema y satisface las restricciones del problema.

El objetivo del modelo Optgen es determinar el cronograma de inversión de mínimo costo para la construcción de nuevos generadores, líneas de interconexión entre sistemas, fuentes de producción de gas y gasoductos. El algoritmo para la determinación del plan de expansión óptimo, por lo tanto, realiza un análisis de compromiso entre el costo total de inversión y el valor esperado del costo total de operación para cada alternativa.

El valor esperado de los costos operativos se calcula teniendo en cuenta las fuentes de incertidumbres (hidrológicas, disponibilidad, etc) y está sujeto a restricciones operativas tales como el suministro de la demanda, restricciones de balance hídrico en embalses y centrales de pasada en cascada, capacidades máximas y mínimas de generación, capacidad de almacenamiento en los embalses y límites de transmisión entre regiones.

Para evaluación del costo de inversión también se representan restricciones tales como fechas mínimas y máximas para la toma de decisión de los proyectos, precedencia entre los proyectos, los conjuntos de proyectos asociados o mutuamente exclusivos y restricciones de energía o potencia firme.

### 2.2 Formulación simplificada del problema

El problema de planificación de la expansión de un sistema de energía se plantea como un problema de programación matemática, expreso de manera simplificada por la formulación a continuación. Se supone, por simplicidad, que todos los generadores son proyectos candidatos a la expansión:

#### 2.2.1 Nomenclatura

##### 2.2.1.1 Conjuntos

- $T$  conjunto de periodos de tiempo
- $I$  conjunto de generadores

##### 2.2.1.2 Parámetros

- $ci_{t,i}$  costo de inversión del proyecto  $i$  en etapa  $t$  M\$

$co_{t,i}$	costo de operación del generador $i$ en etapa $t$	M\$
$d_t$	demanda en etapa $t$	MWh
$\bar{g}_i$	producción máxima del generador $i$	MWh

### 2.2.1.3 Variables

$x_{t,i}$	decisión de inversión del proyecto $i$ en etapa $t$	p.u.
$g_{t,i}$	producción del generador $i$ en etapa $t$	MWh

## 2.2.2 Función objetivo

$$\text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (ci_{t,i} \cdot x_{t,i} + co_{t,i} \cdot g_{t,i}) \quad (2.1)$$

## 2.2.3 Restricciones

### 2.2.3.1 Suministro de la demanda

$$\sum_{i \in I} g_{t,i} = d_t \quad \forall t \in T$$

### 2.2.3.2 Límites operativos

$$g_{t,i} - \bar{g}_i \cdot x_{t,i} \leq 0 \quad \forall t \in T, \forall i \in I$$

### 2.2.3.3 Integralidad de la decisión

$$x_{t,i} \in \{0,1\} \quad \forall t \in T, \forall i \in I$$

### 2.2.3.4 Unicidad de la decisión

$$\sum_{t \in T} x_{t,i} \leq 1 \quad \forall i \in I$$

## 2.2.4 Estructura en bloques

Como se puede observar, este problema tiene una estructura de bloques que sugiere el uso de técnicas de descomposición.

	Variables de inversión		Variables de operación	
Min	$ci \cdot x$	+	$co \cdot y$	
s/a	$A \cdot x$			$\geq b$
	$E \cdot x$	+	$F \cdot y$	$\geq h$

En el modelo OptGen se aplica el algoritmo de descomposición de Benders que se explica en el capítulo a continuación.

### 3 ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN

#### 3.1 Planteamiento del problema

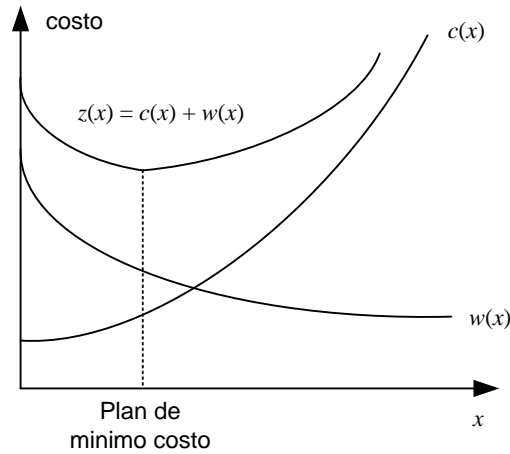
El problema de expansión de un sistema de energía presentado en el capítulo anterior se puede plantear de la siguiente manera:

$$\text{Min } z(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

$$\text{s/a } \mathbf{x} \in X$$

Donde  $X$  representa el conjunto de las decisiones de inversión factibles, esto es, las que atienden a las restricciones  $A \cdot \mathbf{x} \geq b$ . Las funciones  $c(\mathbf{x})$  y  $w(\mathbf{x})$  representan respectivamente los costos de inversión y operación asociados a la alternativa de expansión  $\mathbf{x}$ .

El proceso de optimización se ilustra en la Figura 3.1.



**Figura 3.1 - Proceso de Optimización de la Expansión**

Se observa que la función de costo de inversión  $c(\mathbf{x})$  es conocida, mientras la función operativa  $w(\mathbf{x})$  se representa de manera indirecta como la solución del problema operativo.

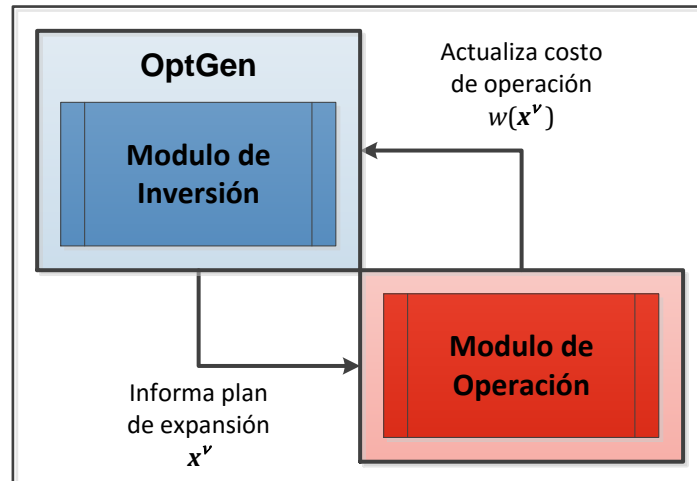
$$w(\mathbf{x}) = \text{Min } co \cdot \mathbf{y} \quad (3.2)$$

$$\text{s/a } F \cdot \mathbf{y} \geq h - E \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} \geq 0$$

La metodología de solución adoptada en el Optgen, conocida como descomposición de Benders, construye la función  $w(\mathbf{x})$  a partir de la solución iterativa de una aproximación del problema de expansión (3.1) y del problema operativo (3.2). La Figura 3.2 ilustra este proceso iterativo.

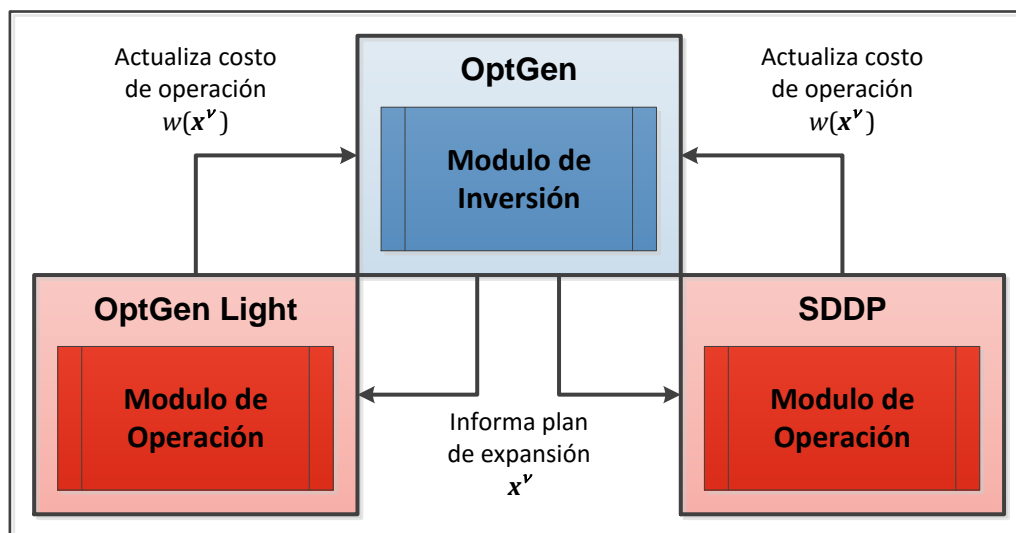




**Figura 3.2 –Descomposición del Problema de la Expansión**

En esta figura se observa que la descomposición de los problemas de inversión y operación permite la utilización de módulos independientes para la solución de cada problema. Actualmente, el modelo OptGen trabaja con dos alternativas, como muestra la Figura 3.3:

- **OptGen Light:** utiliza un módulo de operación simplificado interno del modelo OptGen;
- **OptGen-SDDP:** utiliza el modelo SDDP como módulo de operación integrado al módulo de inversión del modelo OptGen.



**Figura 3.3 –Alternativas de Solución del Problema de Operación**

### 3.2 Características de la función $w(x)$

El problema (3.2) es un modelo de optimización de programación lineal (LP). De la teoría LP, el Dual se formula como:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) = \text{Max} \quad & \boldsymbol{\pi} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) \\
\text{s/a} \quad & \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{F} \leq c\mathbf{o} \\
& \boldsymbol{\pi} \geq 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

De la teoría de programación lineal se puede afirmar que las soluciones óptimas del problema dual (3.3) y del problema operativo (3.2), conocido como primal, tienen el mismo valor. Además, las variables duales  $\boldsymbol{\pi}$  corresponden al vector de multiplicadores simplex asociados a las restricciones del problema primal (3.2) en la solución óptima.

Sea  $\Pi = \{\pi^i, i = 1, \dots, r\}$  el conjunto de soluciones básicas viables del problema dual (3.3). Se observa que este conjunto no depende de la decisión de inversión  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto, se podría obtener la solución óptima del dual por enumeración:

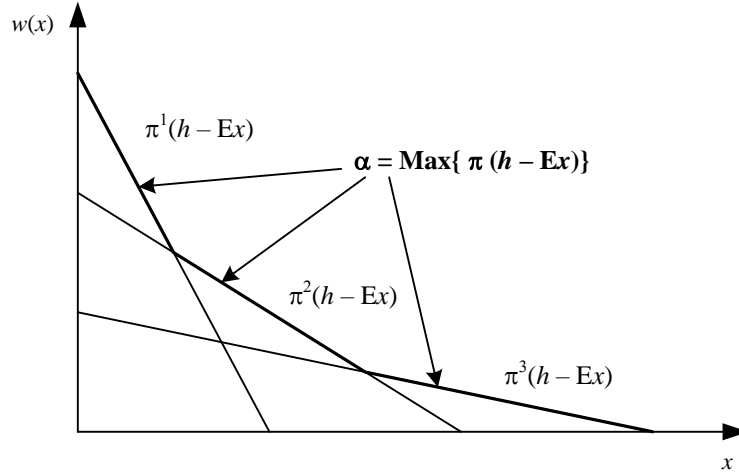
$$w(\mathbf{x}) = \text{Max} \quad \{\pi^i \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}), \pi^i \in \Pi\} \tag{3.4}$$

El problema (3.4) puede ser escrito de manera equivalente como

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}) = \text{Min} \quad & \alpha \\
\text{s/a} \quad & \alpha \geq \pi^1 \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) \\
& \alpha \geq \pi^2 \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}) \\
& \dots \\
& \alpha \geq \pi^r \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $\alpha$  es una variable escalar no restringida (positiva o negativa). En efecto, dado que  $\alpha$  debe exceder cada una de las restricciones  $\alpha \geq \pi^i \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x})$ , debe en particular exceder el máximo de estos valores. Como el objetivo es minimizar  $\alpha$ , resulta que esta será igual a  $\text{Max} \{\pi^i \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x})\}$ . Así queda demostrada la equivalencia con la formulación (3.4).

La ventaja de la formulación (3.5) es que caracteriza la función  $w(\mathbf{x})$  como siendo una función lineal por partes, como se ilustra en la Figura 3.4:

Figura 3.4 - Gráfico de la función  $w(x)$ 

### 3.3 Cálculo del problema de inversión aproximado

Substituyendo la expresión (3.5) en el problema de expansión (3.1), se obtiene:

$$\text{Min } c(x) + \alpha \quad (3.6)$$

$$\text{s/a } \alpha \geq \pi^i \cdot (h - E \cdot x) \quad i = 1, \dots, r$$

$$x \in X$$

El número de restricciones  $\alpha \geq \pi^i \cdot (h - E \cdot x)$  en el problema (3.6) puede ser muy elevado. Sin embargo, sólo algunas de estas restricciones estarán activas (esto es, atendidas en la igualdad) en la solución óptima; las demás pueden ser relajadas sin afectar la solución.

El algoritmo de descomposición de Benders, presentado a continuación, se basa en la relajación del problema (3.6) y en la generación de las restricciones  $\alpha \geq \pi^i \cdot (h - E \cdot x)$  a partir de la solución del problema operativo (3.2).

### 3.4 Algoritmo de descomposición

1. Inicialice: número de iteraciones  $\nu = 0$ ; límite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; tolerancia para convergencia  $\xi$  (dato de entrada)
2. Actualice el número de iteraciones  $\nu = \nu + 1$  y resuelva el problema aproximado de inversión:

$$z = \text{Min } c_i \cdot x + \alpha \quad (3.7)$$

$$\text{s/a } \alpha \geq \pi^\mu \cdot (h - E \cdot x) \quad \mu = 1, \dots, \nu - 1$$

$$x \in X$$

3. Sea  $\{x^v, \alpha^v\}$  la solución óptima de (3.7). Dado que este problema es una relajación del problema original (3.6), su valor óptimo es un límite inferior del óptimo original. Calcule el límite inferior  $\underline{z}$ :

$$\underline{z} = ci \cdot x^v + \alpha^v \quad (3.8)$$

4. Resuelva el problema operativo:

$$w(x^v) = \text{Min } co \cdot y \quad (3.9)$$

$$\text{s/a } F \cdot y \geq h - E \cdot x^v$$

$$y \geq 0$$

5. Sea  $y^v$  la solución óptima de (3.9). El conjunto  $(x^v, y^v)$  es una solución factible del problema original (3.6), pero no necesariamente la solución óptima. Dado que el costo de una solución factible es por definición superior al costo de la solución óptima, el valor:

$$\bar{z} = \text{Min } \{\bar{z}, ci \cdot x^v + co \cdot y^v\} \quad (3.10)$$

es un límite superior de la solución óptima del problema original.

6. Si  $\bar{z} - \underline{z} \leq \xi$ , el problema está resuelto; la solución asociada a  $\bar{z}$  es una solución  $\xi$ -óptima. En caso contrario, genere la siguiente restricción lineal, conocida como corte de Benders:

$$\alpha \geq \pi^v \cdot (h - E \cdot x) \quad (3.11)$$

donde  $\pi^v$  es el vector de multiplicadores simplex asociado a las restricciones del problema operativo (3.9), y regrese al paso 2.

### 3.5 Interpretación geométrica del algoritmo

A partir de la igualdad de las soluciones primal y dual del problema operativo (3.3) se puede obtener una manera alternativa para escribir los cortes de Benders, como ilustrado a continuación:

$$w(x^v) = \pi^v \cdot (h - E \cdot x^v) \quad (3.12)$$

De donde se tiene una expresión para  $\pi^v \cdot h$ :

$$\pi^v \cdot h = w(x^v) + \pi^v \cdot E \cdot x^v \quad (3.13)$$

Substituyendo (3.13) en la expresión del corte de Benders  $\alpha \geq \pi^v \cdot (h - E \cdot x)$ , se obtiene:

$$\alpha \geq w(x^v) - \pi^v \cdot E \cdot (x - x^v) \quad (3.14)$$

Se puede llegar a esta expresión alternativa del corte de Benders, mediante otra deducción. Considere la función:

$$H(\mathbf{x}) = h - E \cdot \mathbf{x} \quad (3.15)$$

que define el lado derecho de las restricciones del problema operativo (3.3). Si  $\pi^*$  es el vector de variables duales asociado a la solución óptima de este problema, entonces se sabe que:

$$\left. \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial H(\mathbf{x})} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^v} = \pi^v \quad (3.16)$$

Utilizando la regla de la cadena, se puede deducir la derivada de  $w(\mathbf{x})$  con respecto a  $\mathbf{x}$ :

$$\left. \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^v} = \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial H(\mathbf{x})} \cdot \left. \frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^v} = -\pi^v \cdot E \quad (3.17)$$

Dado que  $w(\mathbf{x})$  es una función lineal por partes, la expresión (3.17) corresponde a un subgradiente de  $w(\mathbf{x})$  en el punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^v$ . Por lo tanto, se puede afirmar que:

$$w(\mathbf{x}) \geq w(\mathbf{x}^v) + \left. \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^v) \quad (3.18)$$

Denotando  $\alpha = w(\mathbf{x})$ , resulta la expresión (3.14).

De (3.18), se observa que el corte de Benders se interpreta como una aproximación lineal de la función de costo operativo  $w(\mathbf{x})$  alrededor del vector de decisiones producido por el problema de inversión (3.7).

### 3.6 Expresión alternativa para el problema aproximado de inversión

Substituyendo (3.14) en el problema de expansión aproximado (3.7), resulta:

$$z = \text{Min} \quad c_i \cdot \mathbf{x} + \alpha \quad (3.19)$$

$$\text{s/a} \quad \alpha \geq w(\mathbf{x}^\mu) + \lambda(\mathbf{x}^\mu) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\mu) \quad \mu = 1, \dots, v$$

$$\mathbf{x} \in X$$

donde  $\lambda(\mathbf{x}^\mu) = -\pi^\mu \cdot E$ ,  $\mu = 1, \dots, v$ .

### 3.7 Aplicación al problema de planeamiento de la expansión

Se presenta a continuación la aplicación de la metodología de descomposición de Benders al problema de expansión (2.1). Como discutido, el problema operativo se resuelve para cada propuesta de inversión. El corte de Benders se construye a partir del costo óptimo y del vector de multiplicadores simplex del problema operativo. Este corte se añade como una restricción lineal del problema aproximado de inversión, que a su vez produce una nueva propuesta de inversión.

### 3.7.1 Problema Operativo

Dado un plan de expansión  $x^v$ , el problema operativo se plantea como la minimización del costo operativo, sujeto a las restricciones de suministro a la demanda, límites operativos y demás restricciones:

$$w(x^v) = \text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} co_{t,i} \cdot g_{t,i} \quad (3.20)$$

$$\text{s/a} \quad \sum_{i \in I} g_{t,i} = d_t \quad \forall t \in T$$

$$g_{t,i} \leq \bar{g}_i \cdot x_{t,i}^v \quad \forall t \in T, \forall i \in I$$

### 3.7.2 Cálculo del Corte de Benders

En el problema operativo (3.20) solamente las restricciones de límites de generación para los proyectos dependen de las decisiones de inversión  $x^v$ . Por facilidad de notación, se describen estas restricciones en la forma padrón de la programación lineal:

$$-g_{t,i} \geq -\bar{g}_i \cdot x_{t,i}^v \quad \forall t \in T, \forall i \in I \quad \pi_{t,i}^v$$

Donde  $\pi_{t,i}^v$  es variable dual asociada a la restricción en la solución óptima. Aplicando la regla de la cadena, resulta que la derivada asociada a una decisión de inversión  $x_{t,i}$  es:

$$\left. \frac{\partial w(x)}{\partial x_{t,i}} \right|_{x=x^v} = \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^v \cdot (-\bar{g}_i) = -\bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^v \quad (3.21)$$

Y el corte de Benders se calcula como:

$$\alpha \geq w(x^v) - \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \left( \bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^v \right) \cdot (x_{t,i} - x_{t,i}^v) \quad (3.22)$$

Agregando los valores conocidos como:

$$rhs^v = w(x^v) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \left( \bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^v \right) \cdot x_{t,i}^v \quad (3.23)$$

y pasando las variables para el lado izquierdo, resulta:

$$\alpha + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \left( \bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^v \right) \cdot x_{t,i} \geq rhs^v \quad (3.24)$$

### 3.7.3 Problema aproximado de expansión

El objetivo del problema aproximado de expansión es minimizar la suma de los costos actualizados de inversión de los proyectos más el valor aproximado del costo operativo  $\alpha$ , sujeto a las restricciones de integralidad y unicidad de los proyectos y demás restricciones. A cada itera-

ción del algoritmo de descomposición se añade una nueva restricción a este problema, calculada a partir del problema operativo.

El problema aproximado para la  $\nu$ -ésima iteración se plantea como:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_{t,i} \cdot x_{t,i} + \alpha) & (3.25) \\
 \text{s/a} \quad & x_{t,i} \in \{0,1\} & \forall t \in T, \forall i \in I \\
 & \sum_{t \in T} x_{t,i} \leq 1 & \forall i \in I \\
 & \alpha + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \left( \bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=t}^T \pi_{\tau,i}^\mu \right) \cdot x_{t,i} \geq rhs^\mu & \mu = 1, \dots, \nu
 \end{aligned}$$

#### 4 CRITERIO DE VALOR ESPERADO

El algoritmo de Benders puede también ser aplicado a problemas de planeamiento con múltiples escenarios. En estos problemas la estructura de bloques se torna todavía más evidente.

	Variables de inversión		Variables de operación Esc. 1		Variables de operación Esc. 2		Variables de operación Esc. M	
Min	$ci \cdot \mathbf{x}$	+	$co_1 \cdot \mathbf{y}_1$	+	$co_2 \cdot \mathbf{y}_2$	...	$co_M \cdot \mathbf{y}_M$	
s/a	$A \cdot \mathbf{x}$							$\geq b$
	$E_1 \cdot \mathbf{x}$	+	$F_1 \cdot \mathbf{y}_1$					$\geq h_1$
	$E_2 \cdot \mathbf{x}$				$F_2 \cdot \mathbf{y}_2$			$\geq h_2$
	...							
	$E_M \cdot \mathbf{x}$						$F_M \cdot \mathbf{y}_M$	$\geq h_M$

La expansión óptima con criterio de valor esperado se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c(\mathbf{x}) + \bar{w}(\mathbf{x}) \\ \text{s/a} \quad & \mathbf{x} \in X \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $c(\mathbf{x})$  y  $\bar{w}(\mathbf{x})$  son respectivamente el costo de inversión y el costo promedio de operación de la alternativa  $\mathbf{x}$ :

$$\bar{w}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M p_m \cdot w_m(\mathbf{x}) \tag{4.2}$$

donde  $p_m$  es la probabilidad del escenario  $m$ . Dada una decisión  $\mathbf{x}^v$ , el problema operativo para cada escenario  $m$ , con  $m = 1, \dots, M$ , se plantea como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} w_m(\mathbf{x}^v) = \text{Min} \quad & co_m \cdot \mathbf{y}_m \\ \text{s/a} \quad & F_m \cdot \mathbf{y}_m \geq h_m - E_m \cdot \mathbf{x}^v \quad \pi_m^v \\ & \mathbf{y}_m \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

El corte de Benders asociado a cada problema operativo se obtiene de (4.3):



$$\alpha \geq w_m(x^v) + \lambda_m(x^v) \cdot (x - x^v) \quad m = 1, \dots, M$$

donde  $\lambda_m(x^v) = -\pi_m^v \cdot E_m$ . Como la expresión (4.2) es lineal, el corte de Benders es el promedio de los cortes. Definiendo:

$$\bar{\lambda}(x^v) = \sum_{m=1}^M p_m \cdot \lambda_m(x^v) \quad (4.4)$$

Entonces:

$$\alpha \geq \bar{w}(x^v) + \bar{\lambda}(x^v) \cdot (x - x^v) \quad (4.5)$$

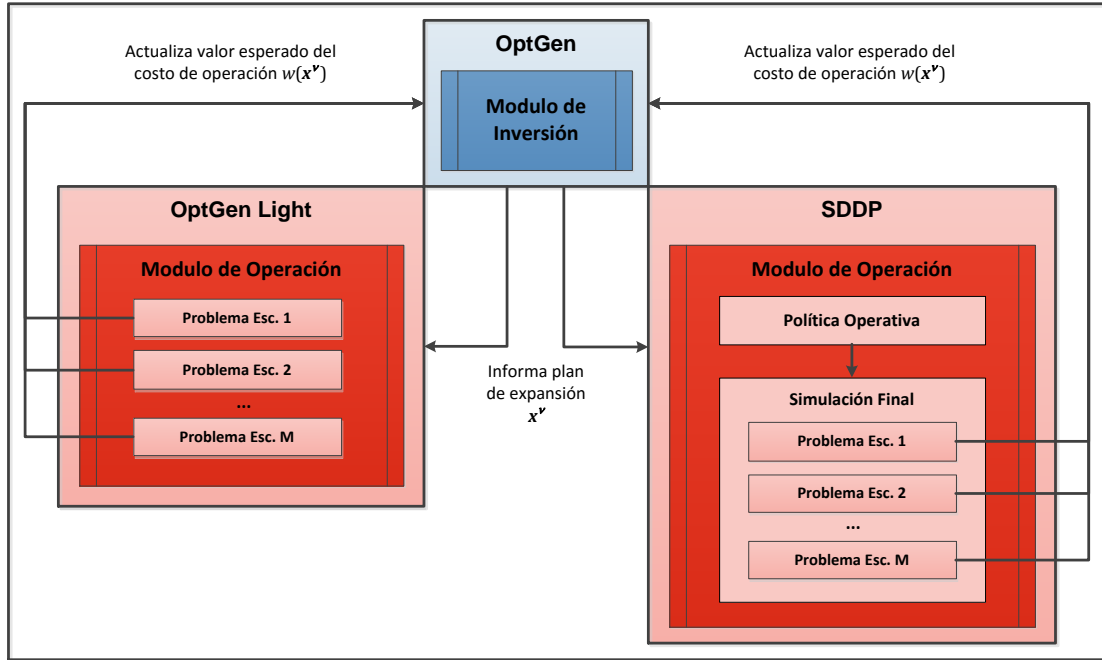
Substituyendo  $\bar{w}(x)$  en (4.1) por los cortes (4.5) generados a cada iteración del algoritmo de descomposición, se obtiene el problema relajado de expansión:

$$z = \text{Min} \quad c(x) + \alpha \quad (4.6)$$

$$\text{s/a} \quad \alpha \geq \bar{w}(x^\mu) + \bar{\lambda}(x^\mu) \cdot (x - x^\mu) \quad \mu = 1, \dots, \nu$$

$$x \in X$$

El proceso de descomposición se ilustra en la Figura 4.1. En esta figura se observa como se considera la incertidumbre para las dos opciones de ejecución: con el OptGen Light y con el OptGen-Sddp.



**Figura 4.1 - Esquema de Descomposición para Múltiples Escenarios**

## 5 DETALLES DE LA FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### 5.1 Problema de Inversión

La planificación a costo mínimo de la expansión de la generación y de la transmisión se formula como un problema de programación matemática como descripto a continuación:

#### 5.1.1 Función objetivo

$$z = \text{Min} \sum_{t \in T} \sum_{i \in P} (ci_{t,i} \cdot x_{t,i} + \alpha) \quad (5.1)$$

$T$	conjunto de etapas en el período de estudio	
$P$	conjunto de proyectos	
$x_{t,i}$	decisión de inversión para la construcción del proyecto $i$ en la etapa $t$	
$ci_{t,i}$	costo de inversión del proyecto $i$ en la etapa $t$ (ver sección 6.1)	M\$
$\alpha$	costo total de operación aproximado	M\$

#### 5.1.2 Fechas mínimas y máximas de decisión

$$\begin{aligned}
 x_{t,i} &= 0 & \forall t \notin [\underline{t}_i, \bar{t}_i], \quad \forall i \in P & \quad (5.2) \\
 \underline{t}_i &= \underline{t}_i^{ope} - \tau_i \\
 \bar{t}_i &= \bar{t}_i^{ope} - \tau_i
 \end{aligned}$$

$\underline{t}_i, \bar{t}_i$	etapas mínima y máxima para la decisión de construcción del proyecto $i$
$\underline{t}_i^{ope}, \bar{t}_i^{ope}$	etapas mínima y máxima para la entrada en operación del proyecto $i$
$\tau_i$	tiempo de construcción del proyecto $i$

#### 5.1.3 Decisiones enteras y continuas de proyectos

$$x_{t,i} \in \{0,1\} \quad \forall i \in P^{int} \quad (5.3)$$

$$x_{t,i} \leq 1 \quad \forall i \in P^{cnt} \quad (5.4)$$

$P^{int}$	conjunto de decisiones enteras de proyectos
$P^{cnt}$	conjunto de decisiones continuas de proyectos

#### 5.1.4 Proyectos obligatorios y opcionales

$$\sum_{t=\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} x_{t,i} = 1 \quad \forall i \in P^{ob} \quad (5.5)$$

$$\sum_{t=\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} x_{t,i} \leq 1 \quad \forall i \in P^{op} \quad (5.6)$$

$$x_{t,i} = 0 \quad \forall i \in P, \forall t \notin [\underline{t}_i, \bar{t}_i] \quad (5.7)$$

$P^{ob}$  conjunto de proyectos obligatorios

$P^{op}$  conjunto de proyectos opcionales

#### 5.1.5 Proyectos mutuamente excluyentes

$$\sum_{i \in P_k^{ex}} \sum_{t=\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} x_{t,i} \leq 1 \quad \forall k \in R^{ex} \quad (5.8)$$

$R^{ex}$  conjunto de restricciones excluyentes

$P_k^{ex}$  conjunto de proyectos que pertenecen a la restricción excluyente  $k$

#### 5.1.6 Proyectos asociados

$$\sum_{t=\underline{t}_i}^{\bar{t}_i} x_{t,i} - \sum_{t=\underline{t}_j}^{\bar{t}_j} x_{t,j} = 0 \quad \forall i, j \in P_k^{as}, \forall k \in R^{as} \quad (5.9)$$

$R^{as}$  conjunto de restricciones asociadas

$P_k^{as}$  conjunto de proyectos que pertenecen a la restricción asociada  $k$

#### 5.1.7 Capacidad instalada mínima y máxima

$$\sum_{t=\underline{t}_k}^{\bar{t}_k} \sum_{i \in P_k^{min}} \omega_i \cdot x_{t,i} \geq \underline{\omega}_k \quad \forall k \in R^{min} \quad (5.10)$$

$$\sum_{t=\underline{t}_k}^{\bar{t}_k} \sum_{i \in P_k^{max}} \omega_i \cdot x_{t,i} \geq \underline{\omega}_k \quad \forall k \in R^{min} \quad (5.11)$$

$\omega_i$	capacidad instalada del proyecto $i$	MW
$\underline{\omega}_k, \bar{\omega}_k$	capacidad instalada adicional, mínima y máxima, de la restricción $k$	MW
$\underline{\tau}_k, \bar{\tau}_k$	etapas mínima y máxima para la decisión de construcción de la restricción de capacidad $k$	
$R^{min}$	conjunto de restricciones de capacidad mínima	
$P_k^{min}$	conjunto de proyectos que pertenecen a la restricción de capacidad mínima $k$	
$R^{max}$	conjunto de restricciones de capacidad máxima	
$P_k^{max}$	conjunto de proyectos que pertenecen a la restricción de capacidad máxima $k$	

### 5.1.8 Precedencia entre proyectos

$$\sum_{\tau=\underline{\tau}_j}^t x_{\tau,j} - \sum_{\tau=\underline{\tau}_i}^t x_{\tau,i} \geq 0 \quad \forall i, j \in P_k^{pre}, \forall k \in R^{pre}, \quad (5.12)$$

$$\forall t \in T$$

$R^{pre}$	conjunto de restricciones de precedencia
$P_k^{pre}$	conjunto de proyectos que pertenecen a la restricción de precedencia $k$ , donde el proyecto $i$ precede al proyecto $j$

### 5.1.9 Energía y capacidad firme por sistema

$$\sum_{t \in T_y} \Delta_t \cdot \left( \sum_{i \in G_n} w_{t,i}^e + \sum_{i \in P_n^G} w_{t,i}^e \cdot \sum_{\tau=\underline{\tau}_i}^t x_{\tau,i} \right) \geq f_{y,n}^e \cdot \sum_{t \in T_y} d_{t,n} \quad \forall n \in N, \forall y \in Y \quad (5.13)$$

$$\sum_{i \in G_n} w_{t,i}^p + \sum_{i \in P_n^G} w_{t,i}^p \cdot \sum_{\tau=\underline{\tau}_i}^t x_{\tau,i} \geq f_{y,n}^p \cdot \max_{t \in T_y} \left( \frac{d_{t,n}}{\Delta_t} \right) \quad \forall n \in N, \forall y \in Y \quad (5.14)$$

$Y$	conjunto de años del estudio	
$T_y$	conjunto de etapas que pertenecen al año $y$	
$N$	conjunto de sistemas	
$G_n$	conjunto de plantas generadoras existentes del sistema $n$	
$P_n^G$	conjunto de proyectos de generación del sistema $n$	
$\Delta_t$	duración de la etapa $t$	hours
$d_{t,n}$	demanda del sistema $n$ en la etapa $t$	MWh
$w_{t,i}^e$	energía firme de la planta $i$ en la etapa $t$	MW
$f_{y,n}^e$	factor de energía firme del sistema $n$ en el año $y$	p.u.

$w_{t,i}^p$	capacidad firme de la planta $i$ en la etapa $t$	MW
$f_{y,n}^p$	factor de capacidad firme del sistema $n$ en el año $y$	p.u.

### 5.1.10 Benders cuts

$$\alpha \geq w_\mu + \sum_{t \in T} \sum_{i \in P} \lambda_{t,i,\mu} \cdot (x_{t,i} - x_{t,i,\mu}) \quad \mu = 1, \dots, v \quad (5.15)$$

$w_\mu$
$\lambda_{t,i,\mu}$
$x_{t,i,\mu}$

## 5.2 Problema de operación

Para cada decisión de expansión  $x_{t,i,\mu}$ , resultado del problema de inversión, el problema de operación a mínimo costo es formulado como descrito a continuación:

### 5.2.1 Función objetivo

$$w_\mu = \text{Min} \sum_{t \in T} \left( \sum_{i \in G} co_{t,i} \cdot g_{t,i} + def \cdot r_t \right) \quad (5.16)$$

$T$	conjunto de etapas del periodo de estudio	
$G$	conjunto de plantas térmicas	
$g_{t,i}$	generación de la planta térmica $i$ en la etapa $t$	MWh
$co_{t,i}$	costo de generación de la planta térmica $i$ en la etapa $t$ (ver sección 6.2)	M\$/MWh
$r_t$	déficit de generación en la etapa $t$	MWh
$def$	costo de déficit	M\$/MWh

### 5.2.2 Balance hídrico

$$v_{t,i} - v_{t-1,i} + u_{t,i} + s_{t,i} - \sum_{j \in M_i} (u_{t,j} + s_{t,j}) = a_{t,i} \quad \forall t \in T, \forall i \in H \quad (5.17)$$

$$v_{0,i} = v0_i \quad \forall i \in H$$

$H$	conjunto de plantas hidro	
$M_i$	conjunto de plantas aguas arriba de la planta hidro $i$	
$v_{t,i}$	volumen almacenado por la planta hidro $i$ en la etapa $t$	Hm3
$u_{t,i}$	volumen turbinado por la planta hidro $i$ en la etapa $t$	Hm3

$s_{t,i}$	volumen vertido por la planta hidro $i$ en la etapa $t$	Hm3
$a_{t,i}$	volumen afluente a la planta hidro $i$ en la etapa $t$	Hm3
$v_{0,i}$	volumen inicial almacenado en la planta hidro $i$	Hm3

### 5.2.3 Suministro de la demanda

$$\sum_{i \in G_n} g_{t,i} + \sum_{i \in H_n} \rho_i \cdot u_{t,i} - \sum_{k \in K_n} f_{t,k} + \sum_{k \in K_n} (1 - p_k) \cdot f_{t,k} = d_{t,n} \quad \forall t \in T, \quad (5.18)$$

$\forall n \in N$

$G_n$	conjunto de plantas térmicas del sistema $n$	
$H_n$	conjunto de plantas hidro del sistema $n$	
$K_n$	conjunto de interconexiones conectadas al sistema $n$	
$g_{t,i}$	generación de la planta térmica $i$ en la etapa $t$	MWh
$u_{t,i}$	volumen turbinado de la planta hidro $i$ en la etapa $t$	Hm3
$\rho_i$	factor de producción de la planta hidro $i$	MWh/Hm3
$f_{t,k}$	flujo en la interconexión $k$ en la etapa $t$	MWh
$p_k$	factor de pérdidas de la interconexión $k$	p.u.
$d_{t,n}$	demanda del sistema $n$ en la etapa $t$	MWh

### 5.2.4 Límites operativos

$$g_{t,i} \leq \bar{g}_i \quad \forall i \in G | i \notin P \quad (5.19)$$

$$g_{t,i} \leq \bar{g}_i \cdot \sum_{\tau=1}^t x_{\tau,i,\mu} \quad \forall i \in G | i \in P \quad (5.20)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad \forall i \in H | i \notin P \quad (5.21)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \cdot \sum_{\tau=1}^t x_{\tau,i,\mu} \quad \forall i \in H | i \in P \quad (5.22)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad \forall i \in H | i \notin P \quad (5.23)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \cdot \sum_{\tau=1}^t x_{\tau,i,\mu} \quad \forall i \in H | i \in P \quad (5.24)$$

$$f_{t,k} \leq \bar{f}_k \quad \forall k \in K | k \notin P \quad (5.25)$$

$$f_{t,k} \leq \bar{f}_k \cdot \sum_{\tau=1}^t x_{\tau,k,\mu} \quad \forall k \in K | k \in P \quad (5.26)$$

$P$  conjunto de proyectos

$\bar{g}_i$	generación máxima de la planta térmica $i$	MWh
$\bar{v}_i$	almacenamiento máximo de la planta hidro $i$	Hm3
$\bar{u}_i$	turbinamiento máximo de la planta hidro $i$	Hm3
$\bar{f}_k$	flujo máximo de la interconexión $k$	MWh
$x_{\tau,i,\mu}$	$\mu$ -th decisión de construcción de la planta $i$ en la etapa $t$	

## 6 CARACTERÍSTICAS ADICIONALES DEL MODELO

### 6.1 Costo de Inversión

Con el objetivo de evaluar el costo de la inversión asociado a la construcción de cada proyecto para cada posible etapa del horizonte del estudio, los siguientes datos son tomados en cuenta por el modelo:

Datos de proyecto:

$c^{inv}$	costo de inversión	M\$
$c^{ele}$	costo de integración eléctrica	\$/kW
$c^{o\&m}$	costo de operación & mantenimiento	\$/kW
$\omega$	capacidad instalada	MW
$L$	tiempo de vida útil	years

Calendario de pago:

$N$	número de desembolsos	
$n^0$	año de entrada en operación	
$p_n$	desembolsos	%

Parámetros adicionales:

$tx$	tasa de descuento	%
$T$	horizonte del estudio	years

El costo asociado a la decisión de construcción de cada proyecto, en cada etapa de inversión, se evalúa como el costo total de inversión  $ct$  descontado el valor terminal  $cr$ , que corresponde al costo de restitución asociado al periodo de vida útil del proyecto después del final del horizonte de estudio.

En otras palabras, el costo de inversión utilizado en el problema de optimización esta asociado con el periodo en el cual el proyecto está disponible para operación. De esta manera, en el proceso de optimización, tanto los costos de inversión como de operación se contabilizan para el mismo periodo en el horizonte del estudio.

En resumen, para la correcta evaluación de los costos de inversión se asume que los desembolsos son anualizados:

- comienzan la entrada en operación en el mismo año,
- terminan en el año final del estudio o al final de la vida útil del proyecto,
- se pagan al final de cada año

El total de costo de inversión  $ct$  es evaluado por el siguiente procedimiento:

La suma del costo de la inversión y el costo de integración eléctrica se refiere al año de entrada en operación, teniendo en cuenta el calendario de pagos:



$$c_0 = \left( c^{inv} + \frac{c^{ele} \cdot \omega}{1000} \right) \cdot \sum_{n=1}^N \frac{p_n}{100} \cdot (1 + tx)^{(n^0 - n)}$$

El costo de la inversión anual se calcula como un flujo de caja durante el período de vida útil del proyecto. Los costos de operación y mantenimiento son agregados a este valor:

$$ca = c_0 \cdot \frac{tx \cdot (1 + tx)^L}{(1 + tx)^L - 1} + \frac{c^{o\&m} \cdot \omega}{1000}$$

Por último, el valor neto presente es calculado para este flujo de caja:

$$ct = ca \cdot \frac{(1 + tx)^L - 1}{tx \cdot (1 + tx)^{(t^0 + L)}}$$

donde  $t^0$  es la etapa de entrada en operación:

$$t^0 = t + (n^0 - 1) - 1$$

Para evaluar el valor terminal  $cr$ , se define  $L^r$  como los años restantes de vida útil del proyecto después del final del horizonte del estudio:

$$L^r = \max\{0, L - (T - t^0)\}$$

Si  $L^r = 0$ , entonces:

$$cr = 0$$

Caso contrario, el valor terminal es calculado como el valor neto presente de los desembolsos anuales asociados a los años posteriores al final del horizonte del estudio

$$cr = ca \cdot \frac{(1 + tx)^{L^r} - 1}{tx \cdot (1 + tx)^{(T + L^r)}}$$

Luego, el costo de inversión del proyecto  $i$  en la etapa  $t$  es calculado como la diferencia entre el costo total y el valor terminal:

$$ci = ct - cr$$

## 6.2 Costo operativo

Los costos unitarios de generación de las centrales térmicas se calculan como:

$$co_{t,i} = \frac{cf_{t,j}}{ec_j} \cdot hr_i \cdot 1000$$

$co_{t,i}$	costo de generación de la planta térmica $i$ en la etapa $t$	\$/MWh
$cf_{t,j}$	costo unitario del combustible $j$ en la etapa $t$	\$/unit
$ec_j$	contenido energético del combustible $j$	kcal/unit
$hr_i$	consumo específico de la planta térmica $i$	Kcal/kWh

### 6.3 Referencia de costo marginal

Para cada proyecto, el modelo OptGen calcula un costo marginal de referencia (\$ / MWh) de la siguiente manera.

Plantas hidro:

$$\frac{ca \cdot 10^6}{\omega \cdot MF \cdot 8760h}$$

Plantas térmicas:

$$\frac{ca \cdot 10^6 + co \cdot \omega \cdot MF \cdot 8760h}{\omega \cdot WF \cdot 8760h}$$

Interconexiones:

$$\frac{ca \cdot 10^6}{\omega \cdot UF \cdot 8760h}$$

$ca$	costo anual de inversión	M\$
$co$	costo operativo unitario	\$/MWh
$\omega$	capacidad instalada	MW
$MF$	factor de capacidad promedio	p.u.
$WF$	factor de garantía de capacidad	p.u.
$UF$	factor de utilización	p.u.

### 6.1 Costo promedio de largo plazo

Para cada año, el modelo OptGen evalúa el CPLP (\$/MWh) de la siguiente manera:

$$CPLP_t = \frac{\sum_{i=1}^{\min(\tau, T-t)} CT_{t+i-1}/tx_a^{i-1}}{\sum_{i=1}^{\min(\tau, T-t)} DT_{t+i-1}/tx_a^{i-1}}, \quad t = 1, \dots, T$$

$CT_t$	Costo total anual (inversión + operación)	\$
$DT_t$	Demanda anual	MWh
$\tau$	Periodo de amortización	Años
$T$	Horizonte del estudio	Años
$tx_a$	Tasa de descuento anual	p.u.

### 6.2 Costo marginal de largo plazo

Para cada año, el modelo OptGen evalúa el CMLP (\$/MWh) de la siguiente manera:

$$CMLP_t = \frac{\sum_{i=1}^{\min(\tau, T-t)} (CT_{t+i} - CT_{t+i-1}) / (tx_a^i)}{\sum_{i=1}^{\min(\tau, T-t)} (DT_{t+i} - DT_{t+i-1}) / (tx_a^i)}, \quad t = 1, \dots, T - 1$$

$CT_t$	Costo total anual (inversión + operación)	\$
$DT_t$	Demanda anual	MWh
$\tau$	Periodo de amortización	Años
$T$	Horizonte del estudio	Años
$tx_a$	Tasa de descuento anual	p.u.

# **SDDP**

## **Manual de Metodología**

### **VERSIÓN 15.0**

Marzo 2018



**PSR**

## Tabla de Contenido

1	Introducción .....	1
2	Optimización Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos .....	2
2.1	Modelación de los componentes básicos del sistema .....	2
2.2	Problema de despacho hidrotérmico .....	4
2.3	Formulación del problema.....	5
2.4	Enfoque de solución basada en el espacio de estados .....	7
2.5	Representación alternativa de la correlación serial .....	12
2.6	Limitaciones del esquema PDE .....	13
2.7	El esquema de PD Dual DP.....	14
2.8	Representación de la correlación serial en la PDDE .....	19
3	Despacho de una Etapa: Formulación Básica.....	22
3.1	Planteamiento del problema.....	22
3.2	Función objetivo.....	22
3.3	Restricciones operativas básicas.....	23
3.4	Función de costo futuro .....	26
4	Restricciones Operativas Adicionales – Hidroeléctrica .....	28
4.1	Vertimiento no controlable .....	28
4.2	Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes de alerta .....	28
4.3	Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes mínimos operativos .....	29
4.4	Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes de espera .....	29
4.5	Restricciones en el desfogue total .....	29
4.6	Restricciones de regulación en centrales de pasada .....	30
4.7	Riego .....	30
4.8	Modelo de volumen muerto .....	31
4.9	Canal de desfogue .....	33
4.10	Generación en función de la afluencia .....	35
4.11	Curva de aversión a riesgo.....	37
4.12	Energía de alerta para un conjunto de embalses.....	38
4.13	Energía mínima de seguridad para un conjunto de embalses .....	39
4.14	Energía de espera para un conjunto de embalses .....	39

5 Restricciones Operativas Adicionales – Plantas Térmicas.....	41
5.1 Centrales térmicas con costos lineales por parte.....	41
5.2 Centrales térmicas <i>must-run</i> .....	42
5.3 Límites en el consumo de combustible.....	42
5.4 Límites en la tasa de consumo de combustible.....	43
5.5 Restricciones de generación mínima para grupos de centrales térmicas.....	43
5.6 Restricciones de generación.....	43
5.7 Centrales térmicas multi-combustible.....	44
5.8 Centrales térmicas tipo unit commitment.....	45
5.9 Plantas térmicas con contrato de combustible.....	46
6 Restricciones Operativas Adicionales – Reserva de Generación.....	49
6.1 Reserva rodante.....	49
6.2 Restricciones de reserva de generación.....	49
7 Fuentes de Energía Renovable.....	51
8 Red de Transporte de Energía.....	52
8.1 Modelo de interconexión.....	52
8.2 Modelo de flujo de potencia linealizado.....	54
8.3 Representación de pérdidas.....	59
9 Disponibilidad y Transporte de Gas Natural.....	63
9.1 Producción de gas.....	63
9.2 Transporte de gas.....	64
9.3 Balance térmico en la simulación de la red de gas.....	65
10 Plantas Térmicas con Costo de Emisión de CO <sub>2</sub> .....	66
11 Clasificación de las Restricciones.....	67
12 Diccionario de Variables.....	68
13 Bibliografía.....	74
A. Programación Dinámica Dual Estocástica.....	75
A.1 Formulación del problema.....	75
A.2 Pasos del algoritmo SDDP.....	75
A.2.1 Selección del conjunto inicial de estados.....	75
A.2.1.1 Estados iniciales de almacenamiento.....	76

A.2.1.2	Estados iniciales de afluencias .....	76
A.2.2	Cálculo de la función aproximada de costo futuro .....	76
A.2.2.1	Generación de N escenarios de afluencias condicionadas .....	76
A.2.2.2	Solución del problema operativo .....	76
A.2.2.3	Cálculo de las derivadas .....	77
A.2.2.4	Cálculo de la aproximación de la función de costo futuro .....	78
A.2.2.5	Actualización de la función de costo futuro de la etapa anterior .....	79
A.2.3	Cálculo del límite inferior .....	79
A.2.4	Cálculo del límite superior .....	79
A.2.4.1	Estados iniciales de almacenamiento .....	79
A.2.4.2	Estados iniciales de afluencias .....	80
A.2.4.3	Simulación operativa .....	80
A.2.4.4	Actualización del estado inicial de almacenamiento .....	80
A.2.4.5	Obtención del límite superior .....	80
A.2.5	Verificación de la optimalidad .....	81
B.	Modelo Estocástico de Caudales .....	82
B.1	Objetivo .....	82
B.2	Modelación en una variable para secuencias de caudales afluentes a un único embalse	82
B.2.1	El Modelo ARP(1) .....	82
B.2.1.1	Introducción .....	82
B.2.1.2	Relación entre el parámetro autoregresivo y la correlación de caudales .....	83
B.2.1.3	El vector de ruidos transformados .....	84
B.2.2	Modelo de ajuste .....	86
B.2.3	Verificación del modelo .....	87
B.2.3.1	Independencia de los ruidos .....	87
B.2.3.2	Ruidos normalizados .....	87
B.2.3.3	Puntos fuera de la curva .....	88
B.3	Modelo multivariado para múltiples embalses .....	88
B.4	Generación sintética de caudales .....	88
B.1	Representación de variables climáticas exógenas .....	90
B.1.1.1	Eligiendo el factor de ponderación .....	90

B.1.2	Modelo de ajuste .....	90
-------	------------------------	----



## 1 INTRODUCCIÓN

Este informe presenta los lineamientos conceptuales del algoritmo de programación dinámica estocástica dual, utilizado en el modelo SDDP.

Se describen las variables de cada ecuación en tablas con cuatro columnas:

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
ej. $v_{t+1}(i)$	ej. volumen de la central $i$ en el inicio de la etapa $t$	$hm^3$	V (variable de decisión) o D (dato de entrada)

## 2 OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

### 2.1 Modelación de los componentes básicos del sistema

#### 2.1.1 Plantas térmicas

En sistemas puramente térmicos el costo operativo de cada central depende básicamente de su costo de combustible. Por lo tanto, se representa una planta térmica por su costo operativo unitario  $\{c_j, j = 1, \dots, J\}$  (\$/MWh) y su capacidad de generación:

$$g_t(j) \leq \bar{g}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (2.1)$$

donde:

$j$	indexa las plantas térmicas		
$J$	número de plantas		
$g_t(j)$	energía producida por la planta $j$ en la etapa $t$	MWh	V
$\bar{g}(j)$	capacidad de generación de la planta $j$	MWh	D

#### 2.1.2 Plantas hidroeléctricas

La Figura 2.1 muestra el diagrama esquemático de una planta hidroeléctrica.

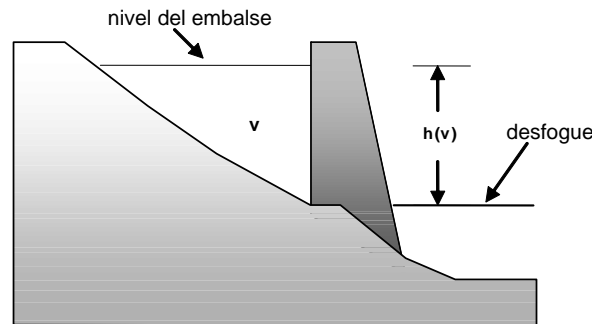


Figura 2.1 – Planta hidroeléctrica con embalse

La operación de la planta se representa a través de las siguientes ecuaciones:

##### 2.1.2.1 Balance hídrico

Representa el enlace en etapas consecutivas, como se ilustra en la Figura 2.2: el almacenamiento al final de la etapa  $t$  (inicio de la etapa  $t + 1$ ) es igual al almacenamiento inicial menos el desfogue total (turbinamiento, vertimiento y riego) más el volumen afluente (caudales laterales más el desfogue de las plantas aguas arriba):

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) - r_t(i) + \delta r_t(i) + \sum_{m \in U_i} [u_t(m) + s_t(m)] \quad (2.2)$$

para  $i = 1, \dots, I$

donde:

$i$	indexa las plantas hidroeléctricas
-----	------------------------------------

$I$	número de plantas		
$v_{t+1}(i)$	volumen almacenado en la planta $i$ al final de la etapa $t$	$m^3$	V
$v_t(i)$	volumen almacenado en la planta $i$ en el inicio de la etapa $t$	$m^3$	D
$a_t(i)$	caudal lateral afluente a la planta $i$ en la etapa $t$	$m^3$	D
$r_t(i)$	riego en la planta $i$ en la etapa $t$	$m^3$	D
$\delta r_t(i)$	violación del riego de la planta $i$ en la etapa $t$	$m^3$	D
$u_t(i)$	volumen turbinado en la etapa $t$	$m^3$	V
$s_t(i)$	volumen vertido en la etapa $t$	$m^3$	V
$m \in U_i$	conjunto de plantas inmediatamente aguas arriba de la planta $i$		

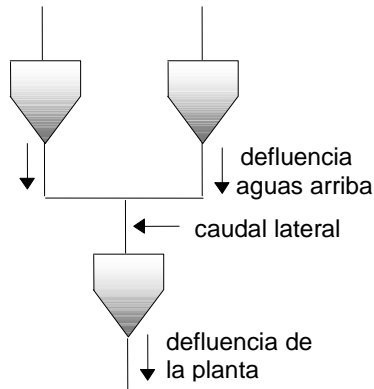


Figura 2.2 – Balance hídrico

#### 2.1.2.2 Límites en el almacenamiento y en el desfogue

$$v_t(i) \leq \bar{v}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (2.3)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (2.4)$$

donde:

$\bar{v}(i)$	Capacidad de almacenamiento de la planta $i$	$m^3$	D
$\bar{u}(i)$	Capacidad de turbinamiento de la planta $i$	$m^3$	D

#### 2.1.2.3 Producción de energía

Las plantas hidroeléctricas convierten la energía potencial del agua almacenada en energía cinética, la cual se usa para mover las turbinas acopladas a generadores. La energía producida por el turbinamiento de  $u(i) \text{ m}^3$  se calcula por:

$$g_t(i) = \rho(v_t(i)) \times u_t(i) \quad (2.5)$$

donde:

$g_t(i)$	energía generada en la central hidroeléctrica $i$ , en la etapa $t$	MWh	V
$\rho(v_t(i))$	coeficiente de producción de la central hidroeléctrica $i$	MWh/ $m^3$	D
$u_t(i)$	turbinamiento de la central hidroeléctrica $i$ , en la etapa $t$	$m^3$	V

El coeficiente de producción  $\rho(v_t(i))$  a su vez se calcula por:

$$\rho(v_t(i)) = \eta(i) \times \phi \times \gamma \times h(v_t(i)) \quad (2.6)$$

donde:

$\eta(i)$	eficiencia del conjunto de turbinas/generadores de la central hidroeléctrica $i$		D
$\phi$	masa específica del agua	kg/m <sup>3</sup>	D
$\gamma$	factor de gravedad	m/s <sup>2</sup>	D
$h(v_t(i))$	caída neta - la diferencia entre la cota del embalse y aguas debajo de la hidroeléctrica $i$ (Figura 2.1)	m	D

### 2.1.3 Demanda

La demanda de energía eléctrica se representa a través de una restricción en que la suma de la energía producida (en las centrales térmicas e hidroeléctricas) debe ser igual a la demanda (mensual o semanal), es decir:

$$\sum_{j=1}^J g_t(j) + \sum_{i=1}^I \rho(v_t(i)) \times u_t(i) = d_t$$

$d_t$	Demanda (mensual o semanal) de energía eléctrica	MWh	D
-------	--	-----	---

## 2.2 Problema de despacho hidrotérmico

### 2.2.1 Características del problema

El objetivo del despacho hidrotérmico es determinar la secuencia de desfogues de las plantas hidroeléctricas que minimice el valor esperado del costo operativo total (dado por el costo de combustible más las penalizaciones por racionamiento) a lo largo del período de estudio. Como muestra la Figura 2.3 este problema se puede representar como un árbol de decisiones.

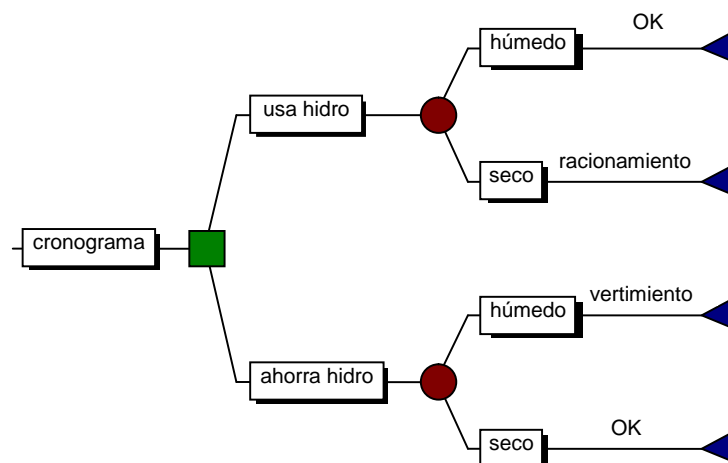


Figura 2.3 – Proceso de decisión para el despacho hidrotérmico

Como muestra la figura, el operador tiene las opciones de usar la energía hidroeléctrica hoy, y con esto reducir los costos de la energía térmica complementaria, o de almacenarla para usarla en la próxima etapa. Si la decisión hoy es utilizar la energía de base hidroeléctrica y en el futuro los caudales son altos – lo que permite llenar los embalses – la operación se dice eficiente. Sin embargo, si ocurre una sequía en el futuro, los embalses no se recuperarán, y será necesario utilizar generación térmica más cara, o hasta mismo interrumpir el suministro de la demanda.

Por otro lado, si la decisión de hoy es almacenar el agua para uso futuro a través del uso de más generación térmica, y los caudales futuros son altos será necesario verter el agua, lo que significa un desperdicio de energía. Sin embargo, se ocurre una sequía en el futuro, el almacenamiento se usará para evitar la generación más cara o un racionamiento de energía.

### 2.3 Formulación del problema

La Figura 2.4. muestra la formulación del despacho hidrotérmico estocástico para el caso de una planta y un árbol de caudales con tres etapas.

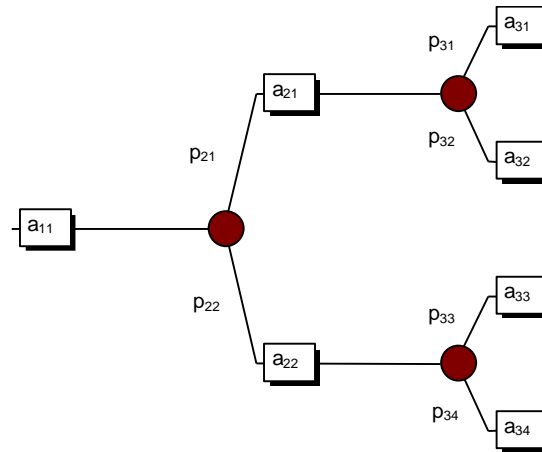


Figura 2.4 – Árbol de escenarios de caudales

donde:

$a_{ts}$	caudal en la etapa $t$ , escenario $s$	$m^3$	D
$p_{ts}$	probabilidad condicionada del escenario $s$ de caudal en la etapa $t$	p.u.	D

El problema de despacho estocástico se formula como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1(u_{11}) + p_{21}[c_2(u_{21}) + p_{31}c_3(u_{31}) + p_{32}c_3(u_{32})] \\ & + p_{22}[c_2(u_{22}) + p_{33}c_3(u_{33}) + p_{34}c_3(u_{34})] \end{aligned} \quad (2.7)$$

sujeto a

(a) restricciones de balance hídrico

$$v_{21} = v_{11} - u_{11} - s_{11} + a_{11}$$

$$v_{31} = v_{21} - u_{21} - s_{21} + a_{21}$$

$$v_{41} = v_{31} - u_{31} - s_{31} + a_{31}$$

$$v_{42} = v_{31} - u_{32} - s_{32} + a_{32}$$

$$v_{32} = v_{21} - u_{22} - s_{22} + a_{22}$$

$$v_{43} = v_{32} - u_{33} - s_{33} + a_{33}$$

$$v_{44} = v_{32} - u_{34} - s_{34} + a_{34}$$

(b) restricciones de almacenamiento y desfogue

$$v_{t+1,s} \leq \bar{v}; \quad u_{t,s} \leq \bar{u} \quad \text{para todas las etapas } t; \text{ todos los escenarios } s$$

donde:

$u_{t,s}$	decisión operativa de la planta hidroeléctrica (volumen turbinado) en la etapa $t$ , escenario $s$	$m^3$	V
$c_t(u_{t,s})$	costo de la generación térmica necesaria para complementar la decisión hidroeléctrica	\$	V
$v_{t+1,s}$	nivel de almacenamiento del embalse al final de la etapa $t$ , escenario $s$	$m^3$	V
$s_{t,s}$	volumen vertido en la etapa $t$ , escenario $s$	$m^3$	V

La función de complementación térmica  $c_t(u_{t,s})$  se representa implícitamente a través de la solución del siguiente problema de programación lineal (PL):

$$c_t(u_{t,s}) = \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J c_t(j) \times g_t(j) \quad (2.8)$$

Sujeto a

(c) restricciones del suministro de la demanda

$$\sum_{j=1}^J g_t(j) = d_t - \rho \times u_{ts} \quad \text{para } t = 1, \dots, T$$

(d) restricciones de capacidad de generación térmica

$$g_t(j) \leq \bar{g}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J, \text{ para } t = 1, \dots, T$$

donde:

$j$	indexa las plantas térmicas		
$J$	número de plantas		
$c_t(j)$	costo operativo de la planta $j$	\$/MWh	D
$g_t(j)$	producción de energía de la planta $j$ en la etapa $t$	MWh	V
$\bar{g}(j)$	capacidad de producción de la planta $j$	MWh	D
$d_t$	demanda en la etapa $t$	MWh	D
$\rho$	coeficiente de producción de la planta hidroeléctrica (en este ejemplo es una constante)	MWh/ $m^3$	D

En teoría, se puede resolver el problema (2.8) con algoritmos convencionales de programación lineal (LP). Sin embargo, la dimensión del problema para sistemas reales es demasiado grande

pues se modelan docenas de plantas hidroeléctricas y el horizonte de planificación es de varios años. La razón es que el número de ramas en el árbol de decisiones aumenta exponencialmente con el número de etapas del estudio. Esta limitación de las formulaciones basadas en los árboles de decisión ha motivado el desarrollo de esquemas de solución basados en el *espacio de estados*, que se describen a continuación.

## 2.4 Enfoque de solución basada en el espacio de estados

### 2.4.1 Costos inmediatos y futuros

Como muestra la Figura 2.5, el problema de despacho se descompone en varios subproblemas de una etapa, donde el objetivo es minimizar la suma de los costos operativos *inmediatos y futuros*.

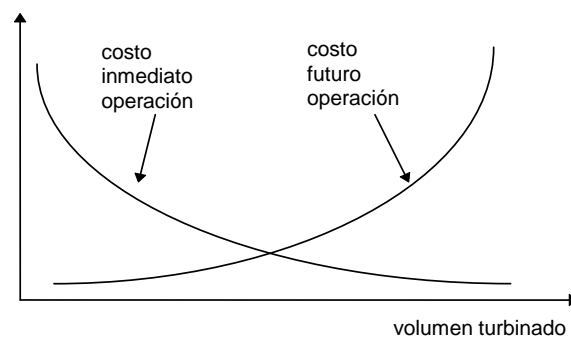


Figura 2.5 – Costos inmediatos y futuros x volumen turbinado

La función de costo inmediato (FCI) corresponde a la función de complementación térmica  $c_t(u_t)$  discutida en la sección anterior. Se observa en la Figura que el monto (y costo) de esta complementación térmica disminuye con el aumento del volumen turbinado. A su vez, la función de costo futuro (FCF) refleja el valor esperado del costo de la generación térmica de la etapa  $t + 1$  hasta el final del periodo de estudio. Se observa que la FCF aumenta con el aumento del volumen turbinado, pues menos energía hidroeléctrica estará disponible en el futuro para desplazar la generación térmica.

### 2.4.2 Despacho hidrotérmico de una etapa

Dado el almacenamiento inicial  $v_t$  y la función de costo futuro  $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$ , el problema de despacho de una etapa se formula como:

$$z_t = \begin{array}{ll} \text{Min} & c_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \\ \text{sujeto a} & \end{array} \quad (2.9)$$

$$v_{t+1} = v_t - u_t - s_t + a_t$$

$$v_{t+1} \leq \bar{v}$$

$$u_t \leq \bar{u}$$

Diferente del problema de optimización estocástico (2.8), que es muy grande, el problema de despacho de una sola etapa (2.9) se puede resolver con facilidad a través de técnicas estándar de programación lineal (LP).

### 2.4.3 Función de costo futuro

#### 2.4.3.1 Enumeración de todos los estados futuros

El cálculo de la función de costo futuro es el tema clave de este esquema de espacio de estados. En teoría,  $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$  se podría calcular a través de una *simulación* de la operación del sistema en el futuro para diferentes valores iniciales de almacenamiento, como se ilustra en la Figura 2.6 a continuación.

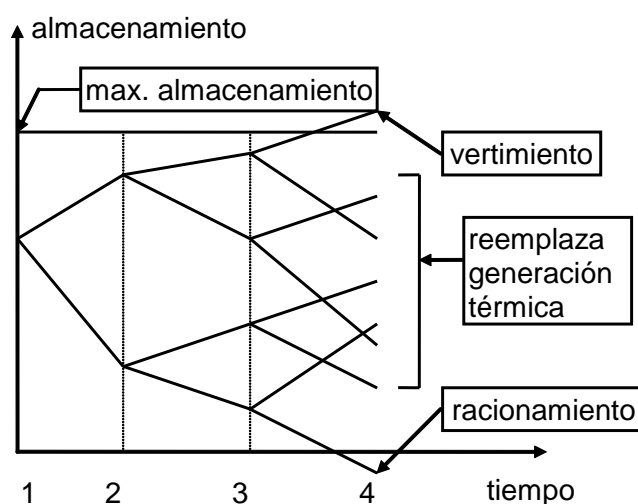


Figura 2.6 – Cálculo de la FCF a través de simulaciones operativas

Sin embargo, este esquema de “fuerza bruta” tiene las mismas desventajas computacionales que la formulación del problema a través de un árbol de escenarios. Un esquema más eficiente de realizar este cálculo es la recursión de *programación dinámica estocástica* (PDE), que se describe a continuación:

#### 2.4.3.2 Recursión de PDE

- Para cada etapa  $t$  (típicamente una semana o mes) se definen un conjunto de *estados del sistema* indexados por  $m = 1, \dots, M$ ; por ejemplo, niveles de almacenamiento en 100%, 90%, etc. hasta 0%. La Figura 2.7 ilustra la definición de los estados del sistema para uno solo embalse. Observe que se supone conocido el estado inicial (el nivel de almacenamiento en el inicio de la primera etapa).



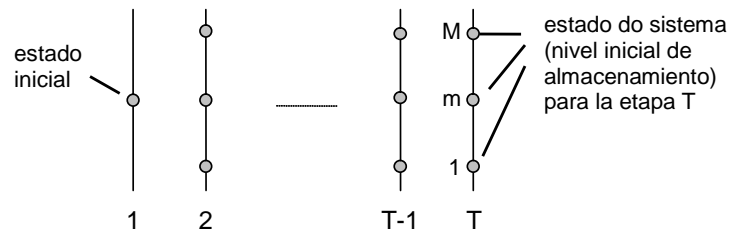


Figura 2.7 – Definición de los estados del sistema

- b) Empezando de la *última* etapa,  $T$ , resuelva el problema de despacho de una etapa (2.9) suponiendo que el almacenamiento inicial es el primer valor del conjunto definido en el paso (a) – por ejemplo, 100%. Dado que se está en la última etapa, la función de costo futuro es igual a cero. Para tomar en cuenta la incertidumbre hidrológica, resuelva el problema de despacho para  $K$  *escenarios* de caudales, que representan los distintos valores posibles de afluencias en la etapa. La Figura 2.8 ilustra el procedimiento.

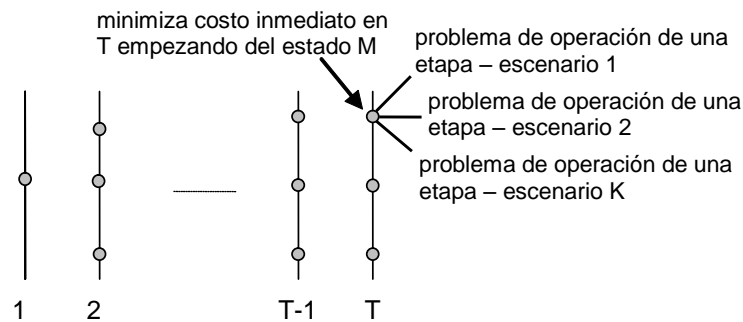


Figura 2.8 – Cálculo de la estrategia óptima – última etapa

- c) Calcule el valor esperado del costo operativo asociado al nivel de almacenamiento 100% como el promedio de los costos de los  $K$  subproblemas de una etapa. Con esto se obtiene el primer punto de la función de costo futuro para la etapa  $T - 1$ , i.e.  $\alpha_T(v_T)$ . Repita el procedimiento de cálculo del valor esperado del costo operativo para cada uno de los estados de almacenamiento inicial en la etapa  $T$ . Interpole los costos entre los estados calculados y produzca la FCF  $\alpha_T(v_T)$  para la etapa  $T - 1$  (ver Figura 2.9)

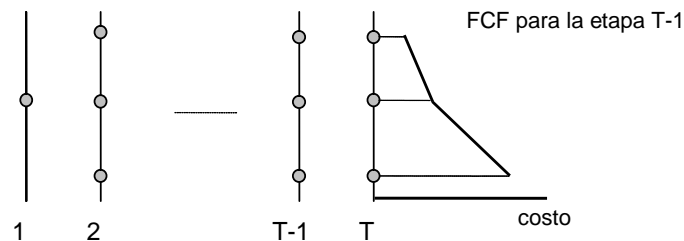


Figura 2.9 – Cálculo de la FCF para la etapa T-1

- d) Repita el procedimiento para cada uno de los estados seleccionados de la etapa  $T - 1$ , como se muestra en la Figura 2.10. Observe que el objetivo ahora es minimizar la suma del costo operativo inmediato de la etapa  $T - 1$  más el valor esperado del costo futuro, dado por la FCF calculada en el paso anterior.

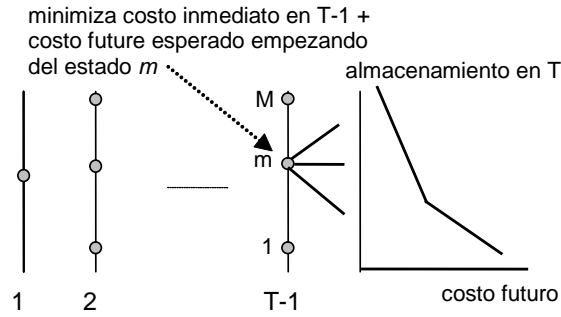


Figura 2.10 – Cálculo de los Costos Operacionales para la Etapa T-1 y FCF calculada en la etapa T

- e) Repita el procedimiento del paso (d) para las demás etapas  $T - 2, T - 3$  etc. hasta la primera etapa.

#### 2.4.3.3 Implementación del esquema SDP

Inicialice la FCF de la última etapa  $\alpha_{T+1}(v_T) \leftarrow 0$

Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$

Repita para cada valor de almacenamiento  $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Repita para cada escenario de caudales  $a_t = a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K$

Resuelva el problema de despacho (2.9) para  $v_t^m$  y caudal  $a_t^k$ :

$$\alpha_t^k(v_t^m) = \text{Min} \quad c_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \quad (2.10)$$

sujeto a

$$v_{t+1} = v_t^m - u_t - s_t + a_t^k$$

$$v_{t+1} \leq \bar{v}$$

$$u_t \leq \bar{u}$$

Fin del “loop”

Calcular los costos operativos considerando todos los escenarios de caudales:

$$\alpha_t(v_t^m) = \sum_{k=1}^K p_k \times \alpha_t^k(v_t^m)$$

Fin del “loop”

Crear una función de costo futuro  $\alpha_t(v_t)$  para la etapa anterior por interpolación de los valores discretos  $\{\alpha_t(v_t^m), m = 1, \dots, M\}$

Fin del “loop”

#### 2.4.4 Representación de la dependencia temporal de los caudales

La mayor parte de los caudales presenta una correlación serial, esto es, si el caudal del mes pasado fue más “seco” que el promedio, existe una tendencia de que el caudal del mes corriente también o sea. Esto se debe al efecto de los acuíferos subterráneos, que funcionan como “capacitores” (la tasa de vaciado del acuífero depende del volumen total absorbido en el pasado). Esta correlación se puede representar por una cadena de Markov, donde  $p_{kl}$  es la probabilidad de transición del caudal  $a_t^k$  en la etapa  $t$  para el caudal  $a_{t+1}^l$  en la etapa  $t + 1$ :

$t+1 \rightarrow$ $t \downarrow$	$a_{t+1}^1$	...	$a_{t+1}^l$	...	$a_{t+1}^L$
$a_t^1$	$p_{11}$	...	$p_{1l}$	...	$p_{1L}$
...	...	...	...	...	...
$a_t^k$	$p_{k1}$	...	$p_{kl}$	...	$p_{kL}$
...	...	...	...	...	...
$a_t^K$	$p_{K1}$	...	$p_{Kl}$	...	$p_{KL}$

La función de costo futuro en el esquema PDE tiene ahora dos variables de estado: el almacenamiento en el inicio de la etapa  $t$  y el caudal a lo largo de la misma etapa. La implementación de la PDE con dos variables de estado se presenta a continuación:

Inicialice la función de costo futuro de la última etapa  $\alpha_{T+1}(v_T, a_T) \leftarrow 0$

Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$

Repita para cada nivel de almacenamiento  $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Repita para cada escenario de caudales  $a_t = a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K$

Resuelva el problema de despacho para el volumen inicial  $v_t^m$  y afluencia  $a_t^k$  donde el objetivo es minimizar la suma del costo inmediato más el valor esperado del costo futuro, calculado para todas las transiciones de  $a_t^k$  to  $\{a_{t+1}^l\}$  en la próxima etapa (Figura 2.11):

$$\alpha_t(v_t^m, a_t^k) = \text{Min } c_t(u_t) + \sum_{l=1}^L p_{kl} \times \alpha_{t+1}(v_{t+1}^k, a_{t+1}^l) \quad (2.11)$$

subeto a

$$v_{t+1}^k = v_t^m - u_t - s_t + a_t^k$$

$$v_{t+1}^k \leq \bar{v}$$

$$u_t \leq \bar{u}$$

Fin del “loop”

Fin del “loop”

Construya la función de costo futuro  $\alpha_t(v_t, a_t)$  para la etapa anterior interpolando los valores calculados  $\{\alpha_t(v_t^m, a_t^k), m = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K\}$

Fin del “loop”

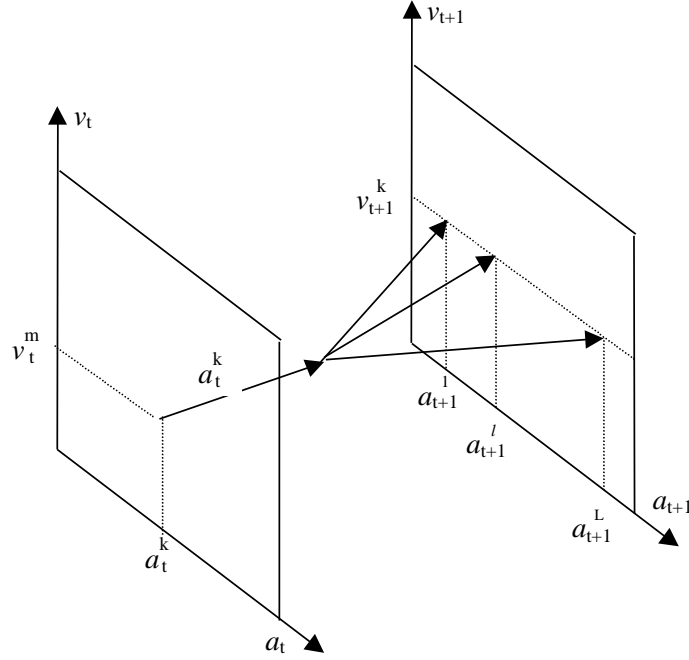


Figura 2.11 – PDE con  $a_t$  como variable de estado

## 2.5 Representación alternativa de la correlación serial

Una manera alternativa – y equivalente en términos matemáticos – de representar las correlaciones seriales es usar como variable de estado el caudal de la etapa *anterior*,  $a_{t-1}$  (Figura 2.12). El procedimiento pasa a ser:

Inicialice la función de costo futuro de la última etapa  $\alpha_{T+1}(v_t, a_{T-1}) \leftarrow 0$

Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$

Repita para cada nivel de almacenamiento  $v_t = v_t^1, \dots, v_t^m, \dots, v_t^M$

Repita para cada escenario de caudales anteriores  $a_{t-1} = a_{t-1}^1, \dots, a_{t-1}^k, \dots, a_{t-1}^K$

Repita para cada caudal condicionado en  $a_{t-1}^k: a_t = a_t^1, \dots, a_t^l, \dots, a_t^L$

Resuelva el despacho para los valores para  $v_t^m$  y  $a_t^l$ :

$$\alpha_t^l(v_t^m, a_{t-1}^k) = \text{Min } c_t(u_t) + \alpha_{t+1}(v_{t+1}^l, a_t^l) \quad (2.12)$$

sujeto a

$$v_{t+1}^l = v_t^m - u_t - s_t + a_t^l$$

$$v_{t+1}^l \leq \bar{v}$$

$$u_t \leq \bar{u}$$

Fin del “loop”

Calcule el valor esperado del costo

$$\alpha_t(v_t^m, a_{t-1}^k) = \sum_{l=1}^L p_{kl} \alpha_t^l(v_t^m, a_{t-1}^k)$$

Fin del “loop”

Fin del “loop”

Construya la función de costo futuro  $\alpha_t(v_t, a_{t-1})$  para la etapa anterior interpolando los valores calculados  $\{\alpha_t(v_t^m, a_{t-1}^k), m = 1, \dots, M; k = 1, \dots, K\}$ .

Fin del “loop”

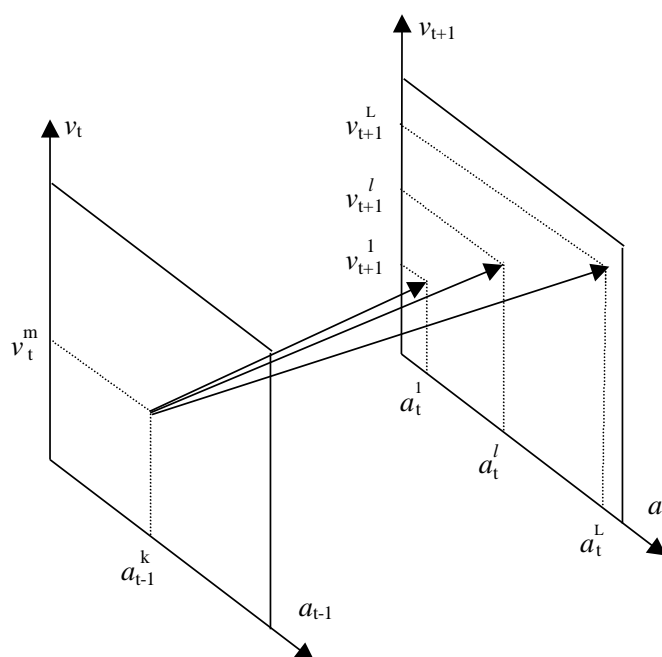


Figura 2.12 – PDE con  $a_{t-1}$  como variable de estado

## 2.6 Limitaciones del esquema PDE

El esquema PDE ha sido usado por varios años en los países con sistemas hidroeléctricos. Sin embargo, la recursión de PDE requiere la enumeración de todas las *combinaciones* de los valores del almacenamiento inicial y de los caudales anteriores. Como consecuencia, el esfuerzo computacional aumenta exponencialmente con el número de embalses. Este crecimiento (conocido como la “**maldición de la dimensionalidad**” de la programación dinámica) se ilustra en el Tabla 2.1, que muestra el número de combinaciones con el número de embalses, suponiendo que los niveles de los embalses y de los caudales se representan por 20 valores cada.

Tabla 2.1 – Maldición de la dimensionalidad

# embalses	# estados
1	$20^2 = 400$
2	$20^4 = 160 \text{ mil}$
3	$20^6 = 64 \text{ millones}$
4	$20^8 \approx 25 \text{ mil millones}$
5	$20^{10} \approx 10 \text{ billones}$

Esta limitación computacional llevó al desarrollo de esquemas aproximados de solución tales como la agregación de los embalses y la programación dinámica con aproximaciones sucesivas, donde la política operativa de cada embalse se calcula en separado, suponiendo conocidas las políticas para los demás embalses.

El enfoque utilizado en el modelo SDDP se basa en una técnica de representación analítica de la función de costo futuro, conocida como programación dinámica dual estocástica (PDDE). El esquema PDDE no requiere la discretización previa del espacio de estados, lo que alivia el esfuerzo computacional de la recursión de PD estocástica. La PDDE se aplicó a docenas de países en las Américas, Europa, Eurasia y Asia-Pacífico.

## 2.7 El esquema de PD Dual DP

### 2.7.1 El algoritmo PDDE

#### 2.7.1.1 Aproximación lineal por partes de la función de costo futuro

El esquema PDDE se basa en el hecho que la FCF se puede representar como una función lineal por partes, esto es, no es necesario crear una tabla con interpolaciones. Además, se muestra que la inclinación de la FCF alrededor de un dado estado se obtiene analíticamente de los multiplicadores Simplex asociados a la solución óptima del problema de despacho de una etapa (2.9). La Figura 2.13 ilustra el cálculo por PDDE del costo operativo promedio y de la inclinación de la FCF para la última etapa, estado inicial = 100% (paso (c) del procedimiento tradicional de PDE).

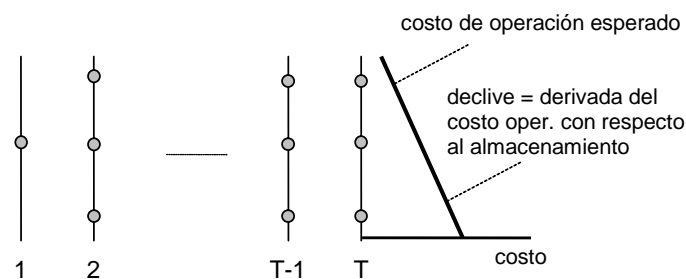


Figura 2.13 – PDDE – Cálculo del primer segmento lineal de la FCF

Se muestra a continuación el problema de despacho de la última etapa (observe que la FCF para esta etapa,  $\alpha_{T+1}(v_{T+1})$ , se inicializa como igual a cero):

$$\begin{aligned}
z_T = & \text{Min} \quad c_T(u_T) && \text{multiplicadores} \\
\text{Sujeto a} & && (2.13) \\
& v_{T+1} = v_T - u_T - s_T + a_T && \pi_h \\
& v_{T+1} \leq \bar{v} && \pi_v \\
& u_T \leq \bar{u} && \pi_u
\end{aligned}$$

De la teoría de la programación lineal, se sabe que los multiplicadores asociados a cada restricción del problema a (2.13) en su solución óptima representan la derivada del costo óptimo  $z_T$  con respecto a una perturbación en el lado derecho de la restricción. En particular, el multiplicador asociado a la ecuación de balance hídrico,  $\pi_h$ , representa la derivada de  $z_T$  con respecto a una variación en el almacenamiento inicial  $v_T$ :

$$\pi_h = \partial z_T / \partial v_T \quad (2.14)$$

Se observa en la Figura 2.13 que la expresión (2.14) corresponde a la inclinación de la FCF para la etapa  $T - 1$ . El segmento lineal se puede interpretar como una expansión en series (hasta el primer término) de la FCF alrededor del almacenamiento inicial  $v_T$ .

La Figura 2.14 muestra el cálculo del costo operativo y de las inclinaciones de la FCF para cada estado en la etapa  $T$ . Se observa que la FCF  $\alpha_T(v_T)$  de la etapa  $T - 1$  es una superficie lineal por partes, donde para cada punto se selecciona el segmento con el costo más alto (“convex hull”).

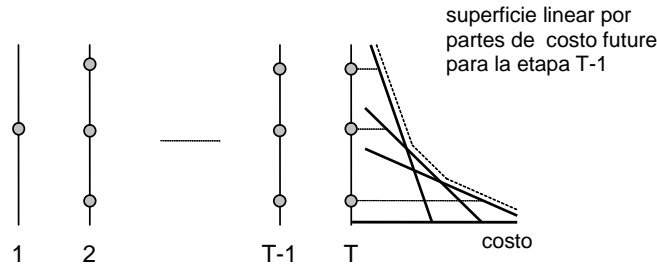


Figura 2.14 – Construcción de una FCF lineal por partes para la etapa T-1

El despacho hidrotérmico para la etapa anterior  $T - 1$  se representa como el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
\alpha_{T-1}(v_{T-1}) = & \text{Min} \quad c_{T-1}(u_{T-1}) + \alpha_T \\
\text{sujeto a} & && (2.15) \\
& v_T = v_{T-1} - u_{T-1} - s_{T-1} + a_{T-1} \\
& v_T \leq \bar{v} \\
& u_{T-1} \leq \bar{u} \\
& \alpha_T \geq \varphi_T^n \times v_T + \delta_T^n && n = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

La FCF se representa por la variable escalar  $\alpha_T$  y por  $N$  restricciones lineales  $\{\alpha_T \geq \varphi_T^n \times v_T + \delta_T^n\}$ , donde  $N$  es el número de segmentos lineales. Como muestra la Figura 2.15, las desigualdades  $\{\alpha_T \geq \dots\}$  representan la característica lineal por partes de esta función (para cualquier  $v_T$ , el segmento “activo” será el del más alto valor  $\varphi_T^n \times v_T + \delta_T^n$ ).

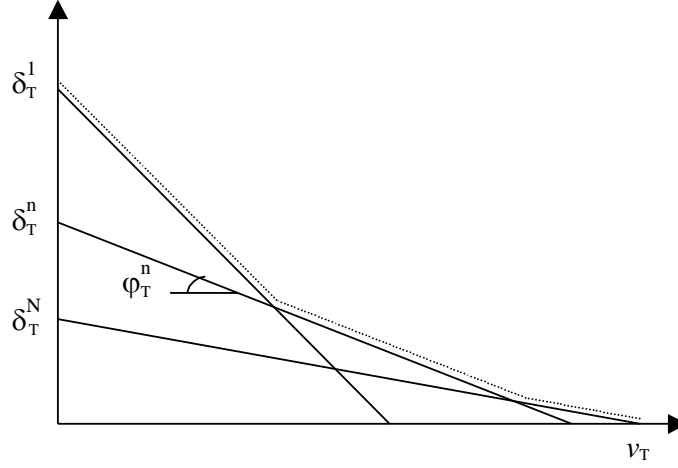


Figura 2.15 – FCF lineal por partes

### 2.7.2 Esquema de recursión “backward”

El procedimiento recursivo para cálculo de la FCF lineal por partes es muy semejante al de la PDE tradicional:

Inicialice el número de segmentos lineales  $N$  = número de almacenamientos iniciales  $M$

Inicialice la FCF para la última etapa:  $\{\varphi_{T+1}^n \text{ and } \delta_{T+1}^n\} = 0$  para  $n = 1, \dots, N$

Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$

Repita para cada nivel de almacenamiento  $v_t = \{v_t^m, m = 1, \dots, M\}$

Repita para cada escenario de caudales  $a_t = a_t^1, \dots, a_t^k, \dots, a_t^K$

Resuelva el problema de despacho para el volumen  $v_t^m$  caudal  $a_t^k$ :

$$\begin{aligned} \alpha_t^k(v_t^m) = & \quad \text{Min} \quad c_t(u_t) + \alpha_{t+1} && \text{multiplicador} \quad (2.16) \\ & \text{sujeto a} \\ & v_{t+1} = v_t^m - u_t - s_t + a_t^k && \pi_{ht}^k \\ & v_{t+1} \leq \bar{v} \\ & u_t \leq \bar{u} \\ & \alpha_{t+1} \geq \varphi_{t+1}^n \times v_{t+1} + \delta_{t+1}^n && \text{para } n = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Fin del “loop”

Calcule el coeficiente y el término constante para el segmento lineal  $m^{th}$  de la FCF de la etapa anterior:



$$\varphi_t^m = \sum_{k=1}^K p_k \times \pi_{ht}^k \quad \text{and} \quad \delta_t^m = \sum_{k=1}^K p_k \times \alpha_t^k(v_t^m) - \varphi_t^m \times v_t^m$$

Fin del “loop”

Fin del “loop”

### 2.7.2.1 Cálculo del límite inferior

A la primera vista, no existen diferencias significativas entre el procedimiento de PDDE y el esquema tradicional de PD. Sin embargo, se observa que bajo el esquema tradicional se construyó la FCF a través de la interpolación de los valores discretizados  $\{\alpha_t(v_t^m)\}$ . Esto significa que el número de puntos necesario para representar un sistema de  $I$  plantas hidroeléctricas es por lo menos igual a  $2^I$  combinaciones de dos puntos extremos para cada embalse (lleno/vacío).

En la PDDE, los segmentos lineales se usan para extrapolar los valores de la FCF, esto es, no es necesario calcular todas las combinaciones de puntos para obtener FCF completa, aunque aproximada. Además, si se usa un conjunto menor de almacenamientos iniciales, se generan menos segmentos lineales. Como muestra la Figura 2.15, la FCF resultante, que se basa en el máximo valor sobre todos los segmentos, será un límite inferior a la función “real”.

En consecuencia, la FCF para la primera etapa es un límite inferior  $\underline{z}$  para la solución óptima del despacho hidrotérmico:

$$\underline{z} = \alpha_1(v_1) \quad (2.17)$$

### 2.7.3 Cálculo del límite superior

Si encontramos una manera de calcular un límite superior  $\bar{z}$  para el valor de la solución óptima, esto haría posible una estrategia de aumentar incrementalmente la precisión de la solución del problema (esto es, empezar con un conjunto pequeño de almacenamientos iniciales; calcular los límites superior e inferior; y aumentar el número de puntos si fuera necesario).

#### 2.7.3.1 Esquema de simulación

Este límite superior se estima a través de una simulación Monte Carlo de la operación del sistema, usando el conjunto de las FCFs producida por el esquema de recursión “backward”, vea la sección 2.7.2. El resultado de la simulación es un límite superior porque la única FCF que resultaría en el menor costo operativo promedio es la FCF óptima; una simulación operativa con cualquier otra FCF resultaría, por definición, en costos operativos más altos que el óptimo.

El esquema de simulación se implementa en los siguientes pasos:

Defina un conjunto de escenarios de caudales  $\mathbf{a}_t = \{a_t^1, \dots, a_t^m, \dots, a_t^M\}$  para  $t = 1, \dots, T$

Repita para cada escenario  $\mathbf{a}_t = a_t^1, \dots, a_t^m, \dots, a_t^M$

Inicialice el almacenamiento para la etapa 1 como 1 las  $v_t^m = v_1$

Repita para  $t = 1, \dots, T$

Resuelva el despacho para el almacenamiento  $v_t^m$  y caudal  $u_t^m$

$$\text{Min} \quad c_t(u_t) + \alpha_{t+1} \quad (2.18)$$

sujeto a

$$v_{t+1}^m = v_t^m - u_t^m - s_t + a_t^m$$

$$v_{t+1}^m \leq \bar{v}$$

$$u_t^m \leq \bar{u}$$

$$\alpha_{t+1} \geq \varphi_{t+1}^n \times v_{t+1}^m + \delta_{t+1}^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N$$

Fin del “loop”

Calcule el costo operativo total  $z^m$  para el escenario  $m$  como la suma de todos los costos inmediatos a lo largo del periodo de estudio:

$$z^m = \sum_{t=1}^T c_t(u_t^m)$$

Fin del “loop”

#### 2.7.3.2 Intervalo de confianza

El valor esperado del costo operativo se estima por el promedio de los costos considerando todos los senarios de caudales:

$$\hat{z} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^T z^m \quad (2.19)$$

Cuando se usa una simulación Monte-Carlo, se puede calcular la incertidumbre alrededor del valor “verdadero” (de población) de  $\bar{z}$ . El intervalo de confianza a 95% es:

$$\bar{z} \in [\hat{z} - 1.96 \times \hat{\sigma}; \hat{z} + 1.96 \times \hat{\sigma}] \quad (2.20)$$

donde  $\hat{\sigma}$  es la desviación estándar del estimador dada por:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{M-1} \sqrt{\sum_{m=1}^M (z^m - \bar{z})^2} \quad (2.21)$$

#### 2.7.4 Verificación de la optimalidad

Se obtiene la solución óptima cuando el límite inferior  $\underline{z}$  calculado en (2.17) está en el intervalo de confianza (2.20). Se observa que, debido a la variación muestral, el límite inferior puede exceder el promedio estimado  $\hat{z}$ .

### 2.7.5 Nueva iteración

Si el límite inferior está fuera del intervalo de confianza, la recursión “backward” se ejecuta de nuevo, a partir de un conjunto adicional de valores de almacenamiento. Los candidatos naturales para los nuevos valores son los volúmenes  $\{v_t^m, m = 1, \dots, M\}$  producidos en el paso de simulación.

Observe que se retiene los segmentos lineales calculados en la iteración anterior, pues la FCF lineal por partes se calcula como el máximo sobre todos los segmentos. En otras palabras, es posible perfeccionar gradualmente la representación de la FCF.

### 2.8 Representación de la correlación serial en la PDDE

La representación de la correlación serial en la PDDE se basa en un proceso de Markov (modelo lineal autoregresivo) y no una cadena de Markov:

$$\frac{(a_t - \mu_t)}{\sigma_t} = \phi_1 \times \frac{(a_{t-1} - \mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}} + \phi_2 \times \xi_t \quad (2.22)$$

donde:

$\mu_t$	caudal promedio
$\sigma_t$	desviación estándar
$\phi_1$ y $\phi_2$	parámetros del modelo
$\xi_t$	variable aleatoria independiente

Se usa la formulación de la sección 2.5, donde las variables de estado son el almacenamiento en el inicio de la etapa  $t$ ,  $v_t$ , y el caudal de la etapa anterior,  $a_{t-1}$ . Esto se ilustra en las ecuaciones abajo, que muestran el problema de despacho para la etapa  $t$ , con almacenamiento inicial  $v_t^m$  y caudal anterior  $a_{t-1}^m$ :

$$\begin{aligned} \alpha_t^l(v_t^m, a_{t-1}^m) = & \quad \text{Min} \quad c_t(u_t) + \alpha_{t+1} \quad \text{multiplicador} \quad (2.23) \\ & \text{sujeto a} \\ & v_{t+1} = v_t^m - u_t - s_t + a_t^l \quad \pi_{ht}^l \\ & v_{t+1} \leq \bar{v} \\ & v_{t+1} \leq \bar{v} \end{aligned}$$

El caudal para la etapa  $t$ ,  $a_t^l$ , resulta de la aplicación del proceso de Markov (2.22):

$$a_t^l = \sigma_t \times [\phi_1 \times \frac{(a_{t-1} - \mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}} + \phi_2 \times \xi_t^l] + \mu_t \quad (2.24)$$

donde  $\xi_t^l$  se muestrea de la distribución de probabilidad correspondiente. La aproximación de la FCF para la etapa anterior tendrá dos coeficientes, basados en las derivadas de  $\alpha_t^l(v_t^m, a_{t-1}^m)$  con respecto a  $v_t^m$  and  $a_{t-1}^m$  en la solución óptima. El primer coeficiente se calcula como en el caso independiente:

$$\partial \alpha_t^l / \partial v_t = \pi_{ht}^l \quad (2.25)$$

El segundo se calcula a través de la regla de la cadena:

$$\partial \alpha_t^l / \partial a_{t-1} = \partial \alpha_t^l / \partial a_t \times \partial a_t / \partial a_{t-1} \quad (2.26)$$

El término  $\partial \alpha_t^l / \partial a_t$  también corresponde al multiplicador  $\pi_{ht}^l$ , porque tanto  $v_t^m$  como  $a_t^l$  están en la misma ecuación de balance hídrico. A su vez, el término  $\partial a_t / \partial a_{t-1}$  se calcula a partir de los parámetros del modelo de caudales de (2.24):

$$\partial a_t / \partial a_{t-1} = \sigma_t \phi_1 / \sigma_{t-1} \quad (2.27)$$

El esquema recursivo se implementa como:

1) Generación de  $M$  secuencias de caudales a lo largo del periodo de estudio

Inicialice  $\{a_0^m\}, m = 1, \dots, M$

Repita para  $t = 1, \dots, T$

Repita para  $m = 1, \dots, M$

Muestre una variable aleatoria  $\xi_t^m$

Calcule el caudal para la etapa  $t$  condicionado al caudal anterior  $a_{t-1}^m$ :

$$a_t^m = \sigma_t \times [\phi_1 \times \frac{(a_{t-1}^m - \mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}} + \phi_2 \times \xi_t^m] + \mu_t$$

Fin del “loop”

Fin del “loop”

2) Recursión Backward

Repita para  $t = T, T-1, \dots, 1$

Repita para  $m = 1, \dots, M$

Recupere el vector de estado [almacenamiento, caudal anterior]  $\{v_t^m, a_{t-1}^m\}$

Repita para  $l = 1, \dots, L$

Muestre una variable aleatoria  $\xi_t^l$

Calcule el caudal para la etapa  $t$  condicionado al caudal anterior  $a_{t-1}^m$ :

$$a_t^l = \sigma_t \times [\phi_1 \times \frac{(a_{t-1}^m - \mu_{t-1})}{\sigma_{t-1}} + \phi_2 \times \xi_t^l] + \mu_t$$

Resuelva el problema de despacho para  $v_t^m$  y  $a_t^k$ :

$$\alpha_t^l(v_t^m, a_{t-1}^m) = \text{Min} \quad c_t(u_t) + \alpha_{t+1} \quad (2.28)$$

sujeito a

$$v_{t+1}^l = v_t^m - u_t - s_t + a_t^l$$

$$v_{t+1}^l \leq \bar{v}$$

$$u_t \leq \bar{u}$$

$$\alpha_{t+1} \geq \varphi_{t+1}^n \times v_{t+1} + \gamma_{t+1}^n \times a_t^l + \delta_{t+1}^n$$

para  $n = 1, \dots, N$

Calcule los coeficientes de la aproximación de la FCF para la etapa anterior, como se ilustra en (2.25) - (2.27)

Fin del “loop”

Fin del “loop”

Fin del “loop”

Observe que  $a_t^l$  es un valor conocido cuando se resuelve el problema de despacho (2.28). Consecuentemente, el término  $\gamma_{t+1}^n \times a_t^l$  se suma al término constante  $\delta_{t+1}^n$ . En otras palabras, dado que las derivadas se calculan analíticamente el esfuerzo computacional del esquema de la PDDE no cambia con el aumento de las dimensiones del espacio de estados.

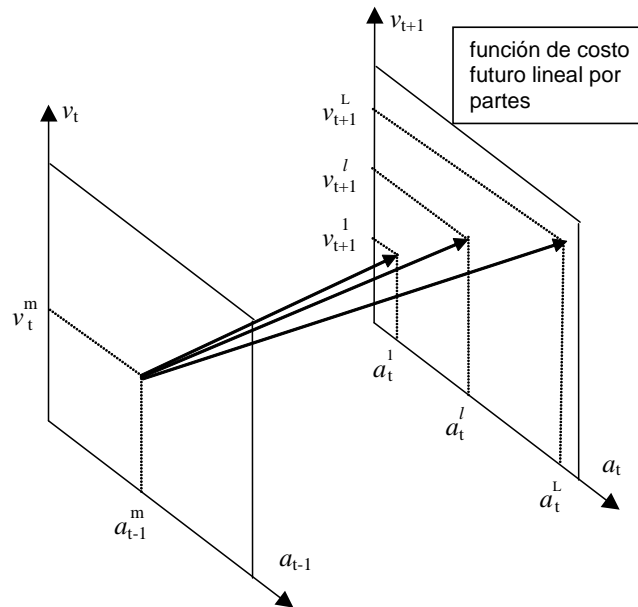


Figura 2.16 – Correlación serial en la PDDE

### 3 DESPACHO DE UNA ETAPA: FORMULACIÓN BÁSICA

#### 3.1 Planteamiento del problema

Se presenta ahora en más detalle el cálculo de la decisión operativa óptima para cada etapa de los estudios de mediano y largo plazo. El problema de despacho hidrotérmico para la etapa  $t$  se plantea como:

$$\text{Min } FCI + FCF \quad (3.1)$$

sujeto a las restricciones operativas básicas de la etapa.

#### 3.2 Función objetivo

Como fue discutido anteriormente, el objetivo del despacho hidrotérmico es minimizar la suma de los costos operativos inmediato y futuro. El costo inmediato  $FCI$  está dado por los costos térmicos  $c(j) \times g_{tk}(j)$  en la etapa  $t$ , más las penalizaciones por las violaciones de restricciones operativas:

$$FCI = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J c(j) \times g_{tk}(j) + c_{\delta} \times \delta_{gt} \quad (3.2)$$

donde

$k$	índice de los escalones de demanda en la etapa		
$K$	número de escalones		
$j$	índice de las centrales térmicas		
$J$	conjunto de centrales térmicas		
$c(j)$	costo variable de operación de la central $j$	\$/MWh	D
$g_{tk}(j)$	energía producida en la planta $j$ en el tiempo $t$ y escalón $k$	MWh	V
$c_{\delta}$	representa (de manera genérica) el costo por la violación de una restricción operativa	\$/unidad violación	D
$\delta_{gt}$	monto de la violación en la etapa $t$	unidad violación	V

A su vez, como se ilustró en la sección 2.4.3, el costo futuro  $FCF$  se representa por la siguiente función:

$$FCF = \alpha_{t+1}(v_{t+1}, a_t) \quad (3.3)$$

donde:

$v_{t+1}$	almacenamiento al final de la etapa $t$	$hm^3$	V
$a_t$	Caudales afluente a los embalses durante la etapa $t$	$hm^3$	D

Observe que la FCF depende de los caudales debido a una dependencia temporal, esto es, un caudal húmedo en la etapa  $t$  indica que en promedio los caudales de la etapa  $t + 1$  también serán húmedos<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Esta dependencia se representa en los parámetros del modelo estocástico de caudales.

### 3.3 Restricciones operativas básicas

A continuación se describen las restricciones operativas básicas del problema de despacho. Estas restricciones son:

- ecuaciones de balance hídrico
- ecuaciones de suministro de la demanda
- límites operativos (límites de almacenamiento en los embalses, restricciones de turbinamiento mínimo y máximo y límites en la generación térmica)

#### 3.3.1 Balance hídrico

Como se ilustró en la sección 2, la ecuación de balance hídrico relaciona el volumen de los embalses con el caudal afluente y el caudal defluente:

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) + a_t(i) - \varepsilon(v_t(i)) - \sum_{k=1}^K [u_{tk}(i) + s_{tk}(i) + \phi_{tk}(i)] \quad (3.4)$$

$$+ \sum_{k=1}^K (\sum_{m \in I_U(i)} u_{tk}(m) + \sum_{m \in I_S(i)} s_{tk}(m) + \sum_{m \in I_F(i)} \phi_{tk}(m))$$

para  $i = 1, \dots, I$

donde:

$i$	índice de las centrales hidroeléctricas		
$I$	conjunto de centrales hidroeléctricas		
$I_U(i)$	conjunto de centrales que turbinan para la central $i$		
$I_S(i)$	conjunto de centrales que vierten para la central $i$		
$I_F(i)$	conjunto de centrales que filtran para la central $i$		
$v_{t+1}(i)$	almacenamiento final de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V
$v_t(i)$	almacenamiento inicial de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$a_t(i)$	caudal lateral afluente a la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$\varepsilon(v_t(i))$	volumen evaporado en la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$u_{tk}(i)$	volumen turbinado por la central $i$ durante la etapa $t$ , escalón $k$	$hm^3$	V
$s_{tk}(i)$	volumen vertido por la central $i$ durante la etapa $t$ , escalón $k$	$hm^3$	V
$\phi_{tk}(i)$	volumen filtrado por la central $i$ durante la etapa $t$ , escalón $k$	$hm^3$	V

#### 3.3.2 Límites de almacenamiento

$$\underline{v}_t(i) \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad \text{for } i = 1, \dots, I \quad (3.5)$$

donde:

$\underline{v}_t(i)$	volumen mínimo de almacenamiento de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$\bar{v}_t(i)$	volumen máximo de almacenamiento de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D

### 3.3.3 Turbinamiento mínimo

Dado que puede ser físicamente imposible atender una restricción de turbinamiento mínimo, es decir, el problema de una etapa puede resultar inviable se modela variables de holgura en las restricciones de turbinamiento mínimo como se ilustra a continuación:

$$u_{tk}(i) + \delta u_{tk}(i) \geq \underline{u}_{tk}(i) \quad \text{for } i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K \quad (3.6)$$

donde:

$\underline{u}_{tk}(i)$	volumen turbinado mínimo para la central $i$ en la etapa $t$ , escalón $k$	$hm^3$	D
$\delta u_{tk}(i)$	violación del turbinamiento mínimo en la etapa $t$ , escalón $k$	$hm^3$	V

En la función objetivo se debe incluir la variable de holgura con un coeficiente de penalización alto<sup>2</sup>

### 3.3.4 Turbinamiento máximo

La máxima energía generada por una central hidroeléctrica está limitada por el mínimo valor entre la capacidad de la turbina y la capacidad del generador, como se muestra en la Figura 3.1.

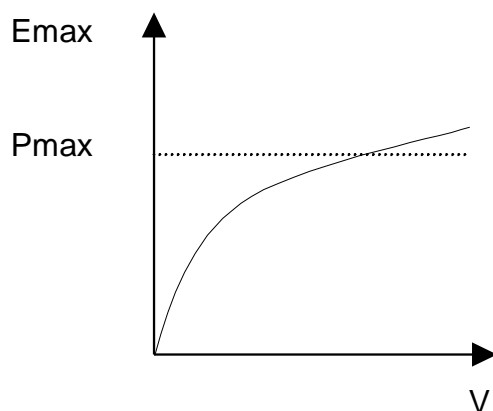


Figura 3.1 – Producción de energía

La restricción de turbinamiento máximo se formula de la siguiente manera:

$$u_{tk}(i) \leq \text{Min} (\bar{u}_{tk}(i), \bar{g}_{tk}(i) / \rho(v_t(i))) \quad \text{para } i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K \quad (3.7)$$

donde:

$\bar{u}_{tk}(i)$	máximo volumen turbinable para la central $i$ , etapa $t$ . Representa la capacidad de la turbina	$hm^3$	D
$\bar{g}_{tk}(i)$	potencia máxima de la central $i$ en la etapa $t$ . Representa la capacidad del generador	$MW$	D
$\rho(v_t(i))$	coeficiente de producción de la central $i$ en la etapa $t$ calculado en función del volumen del embalse	$MWh/hm^3$	D

<sup>2</sup> La penalización debe reflejar el “trade-off” entre el costo operativo y el perjuicio de las violaciones de la restricción



## 3.3.5 Producción de energía hidroeléctrica

$$g_{tk}(i) = \rho(vt(i)) \times u_{tk}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K \quad (3.8)$$

donde:

$g_{tk}(i)$	energía producida por $i$ en el escalón $k$ , etapa $t$	MWh	V
$\rho(vt(i))$	coeficiente de producción de la central $i$ en la etapa $t$	MWh/hm <sup>3</sup>	D

## 3.3.6 Límites en la generación térmica

$$\underline{g}_{tk}(j) \leq g_{tk}(j) \leq \overline{g}_{tk}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.9)$$

donde:

$g_{tk}(j)$	energía producida por la central térmica $j$ en el escalón $k$	MWh	V
$\underline{g}_{tk}(j)$	límite de generación mínima de la central $j$ en el escalón $k$	MWh	D
$\overline{g}_{tk}(j)$	límite de generación máxima de la central $t$ en el escalón $k$	MWh	D

Cabe observar que los límites de generación en cada escalón de demanda se calculan de la siguiente manera:

$$\overline{g}_{tk}(j) = \overline{g}_t(j) \times h(k) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.10a)$$

$$\underline{g}_{tk}(j) = \underline{g}_t(j) \times h(k) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.11b)$$

donde:

$h(k)$	duración del escalón $k$	hora	D
--------	--------------------------	------	---

## 3.3.7 Máxima descarga de la batería

$$ds_k(b) \leq \bar{p}(b) \quad \text{para } b = 1, \dots, B; k = 1, \dots, K \quad (3.12)$$

donde:

$b$	índice de las baterías		
$B$	conjunto de las baterías		
$ds_k(b)$	descarga de la batería $b$ en el escalón $k$	MWh	V
$\bar{p}(b)$	potencia máxima de la batería $b$	MWh	D

## 3.3.8 Máxima carga de la batería

$$cr_k(b) \leq \bar{p}(b) \quad \text{para } b = 1, \dots, B; k = 1, \dots, K \quad (3.13)$$

donde:

$cr_k(b)$	carga de la batería $b$ en el escalón $k$	MWh	V
-----------	---	-----	---

## 3.3.9 Balance de energía de batería

$$vb_{t+1}(b) = vb_t(b) + (\sum_{k=1}^K \beta_c cr_k(b) - ds_k(b)) \text{ para } b = 1, \dots, B \quad (3.14)$$

donde:

$vb_{t+1}(b)$	carga almacenada en la batería $b$ al final de la etapa $t$	MWh	V
$vb_t(b)$	carga almacenada inicial en la batería $b$	MWh	D
$\beta_c$	eficiencia de carga de la batería $b$	p.u.	D

## 3.3.10 Almacenamiento máximo de la batería

$$vb_{t+1}(b) \leq \overline{vb}(b) \quad \text{para } b = 1, \dots, B \quad (3.15)$$

donde:

$\overline{vb}(b)$	almacenamiento máximo de la batería $b$	MWh	D
--------------------	---	-----	---

## 3.3.11 Almacenamiento mínimo de batería

$$vb_{t+1}(b) \geq \underline{vb}(b) \quad \text{para } b = 1, \dots, B \quad (3.16)$$

donde:

$\underline{vb}(b)$	almacenamiento mínimo de la batería $b$	MWh	D
---------------------	---	-----	---

## 3.3.12 Suministro de la demanda

$$\sum_{i=1}^I g_{tk}(i) + \sum_{j=1}^J g_{tk}(j) + \sum_{b=1}^B (\beta_d(b) \times ds_k(b) - cr_k(b)) = d_{tk} \text{ para } k = 1, \dots, K \quad (3.17)$$

donde:

$\beta_d$	eficiencia de descarga de la batería $b$	p.u.	D
$d_{tk}$	demanda de energía en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D

## 3.4 Función de costo futuro

Como se ilustró en la sección 2.7, la función de costo futuro se representa como un conjunto de restricciones lineales, donde cada una representa una linealización de la función.

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1}(v_{t+1}, a_t) &= \alpha \\ &\text{sujeto a} \\ \alpha &\geq w_t(p) + \sum_{i=1}^I \lambda_{tv}(i, p) \times v_{t+1}(i) + \sum_{i=1}^I \lambda_{ta}(i, p) \times a_t(i) \quad (3.18) \\ &\text{para } p = 1, \dots, P \end{aligned}$$

donde:

$p$	índice de los cortes o linealizaciones
-----	--

$P$	número de cortes o linealizaciones de la función de costo futuro		
$\alpha$	variable escalar que representa el valor esperado del costo futuro	$k\$$	V
$w_t(p)$	término constante del p-ésimo corte	$k\$$	D
$\lambda_{tv}(i, p)$	coeficiente del volumen final del embalse $i$ en el p-ésimo corte	$k\$/hm^3$	D
$\lambda_{ta}(i, p)$	coeficiente de la afluencia lateral a la central hidroeléctrica $i$ en el p-ésimo corte	$k\$/hm^3$	D

## 4 RESTRICCIONES OPERATIVAS ADICIONALES – HIDROELÉCTRICA

Además de las restricciones básicas el programa SDDP permite modelar una serie de aspectos adicionales. Cabe observar que la representación de estos aspectos es opcional y depende de las características del sistema en estudio.

### 4.1 Vertimiento no controlable

Para los representar los embalses que no pueden verter si no están llenos, se utilizan restricciones de programación entera mixta, como se ilustra a continuación:

$$x_t(i) \leq v_{t+1}(i) / \bar{v}_t(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.1a)$$

$$s_t(i) \leq M \times x_t(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.1b)$$

donde:

$i$	índice de las centrales hidroeléctricas		
$I$	número de centrales hidroeléctricas		
$x_t(i)$	variable de decisión de la planta $i$ en la etapa $t$	0 – 1	V
$s_t(i)$	volumen vertido de la planta $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V
$M$	una constante de grande valor (representa “infinito”)	$hm^3$	D
$v_{t+1}(i)$	almacenamiento final de la planta $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V
$\bar{v}_t(i)$	almacenamiento máximo de la planta $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D

### 4.2 Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes de alerta

El objetivo de restricciones de volumen de alerta es penalizar el almacenamiento cuando si encuentra en situaciones debajo de un nivel de seguridad. Este tipo de restricciones se utiliza, por ejemplo, en el sistema de Colombia.

$$v_t(i) + \delta a_t(i) \geq \underline{va}_t(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.2)$$

donde:

$\underline{va}_t(i)$	volumen de alerta de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$\delta a_t(i)$	violación del volumen de alerta de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V

Esta variable de holgura entra en la función objetivo con un coeficiente de penalidad ( $\$/hm^3$ ) que debe ser informado por el usuario o puede ser calculado automáticamente por el modelo como siendo:

$1.1 \times [\text{Costo de la térmica más cara } (\$/MWh)] \times [\text{Suma de los coeficientes de producción del embalse y de las centrales aguas abajo del embalse}]$

Por la expresión anterior se concluye que el costo para usar el volumen de alerta es más alto que el costo de utilizar la térmica más cara del sistema. Consecuentemente, el volumen de alerta solo se utilizará cuando todas las plantas térmicas del sistema están generando su capacidad.

#### 4.3 Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes mínimos operativos

La curva de volumen mínimo operativo representa una reserva operativa “estratégica”, más importante que el volumen de alerta.

$$v_t(i) + \delta m_t(i) \geq \underline{vm}_t(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.3)$$

donde:

$\underline{vm}_t(i)$	volumen mínimo operativo de la central $i$ , etapa $t$	$hm^3$	D
$\delta m_t(i)$	violación del volumen mínimo operativo de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V

Esta variable de holgura entra en la función objetivo con un coeficiente de penalidad ( $\$/hm^3$ ) que debe ser informado por el usuario o puede ser calculado automáticamente por el modelo como siendo:

$$1.1 \times [\text{Costo de Racionamiento } (\$/MWh)] \times [\text{Suma de los coeficientes de producción del embalse y de las centrales aguas abajo del embalse}]$$

En otras palabras esta restricción no será atendida únicamente si es físicamente imposible, por ejemplo, si el menor valor de la curva aumenta de una etapa para otra y el caudal no es suficiente para llenar el embalse hasta el nuevo nivel.

#### 4.4 Restricciones de seguridad en los embalses – volúmenes de espera

La curva de volúmenes de espera representa restricciones en el volumen almacenado en el embalse para control de inundaciones. Estas restricciones son modeladas de la siguiente manera:

$$v_t(i) \leq \text{Min} (\overline{v}_t(i), \underline{ve}_t(i)) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.4)$$

donde:

$\underline{ve}_t(i)$	volumen de espera de la central $i$ , etapa $t$	$hm^3$	D
-----------------------	---	--------	---

#### 4.5 Restricciones en el desfogue total

Las restricciones en el desfogue total de una central hidroeléctrica representan restricciones de navegación en el caso del desfogue total mínimo y en el caso del desfogue total máximo sirven para evitar daños aguas abajo en el caso de crecidas.

$$\underline{\Delta}_t(i) \leq u_{tk}(i) + s_{tk}(i) + \delta_{1t}(i) - \delta_{2t}(i) \leq \overline{\Delta}_t(i) \quad (4.5)$$

para  $i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K$

donde:

$\underline{\Delta}_t(i)$	desfogue total mínimo de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$\overline{\Delta}_t(i)$	desfogue total máximo de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	D

$\delta_{1t}(i)$	violación del desfogue mínimo de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V
$\delta_{2t}(i)$	violación del desfogue máximo de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V

Las variables que representan las violaciones de las restricciones de desfogue entran en la función objetivo con un coeficiente de penalidad ( $\$/hm^3$ ). Los valores de penalidad por violación del desfogue total (mínimo o máximo) deben ser informados por el usuario.

#### 4.6 Restricciones de regulación en centrales de pasada

La mayoría de las centrales de pasada tienen pequeños embalses que permiten por lo menos una regulación diaria, es decir, el volumen afluente que llega en la hora fuera de la punta puede ser almacenados para ser turbinado en la hora de punta. En el caso de embalses muy pequeños es posible limitar esta transferencia a través de la siguiente restricción:

$$u_{tk}(i) + s_{tk}(i) \geq \phi(i) \times [a_t(i) \times h(k) + \sum_{m \in I_U(i)} u_{tm}(m) + \sum_{m \in I_S(i)} s_{tm}(m)] \quad (4.6)$$

para  $i = 1, \dots, I$ ;  $k = 1, \dots, K$

donde:

$\phi(i)$  factor de regulación de la central de pasada  $i$  p.u. D

Si el factor de regulación  $\phi(i) = 1$  significa que 100% del volumen lateral afluente en el escalón  $k$  (suma de la afluencia incremental y de los desfogues de las centrales aguas arriba) debe ser usado en el mismo escalón, es decir, no existe transferencia de energía entre los escalones: se trata de una central de pasada *pura*. Caso el factor de regulación  $\phi(i) = 0$  significa que se puede transferir 100% del volumen afluente para producción de energía en cualquier otro escalón. Valores intermedios para  $\phi(i)$ , entre 0 y 1, reflejan una capacidad parcial de regulación de los caudales entre los escalones.

#### 4.7 Riego

Cuando se representan riegos, se modifica la ecuación de balance hídrico de las centrales con riego para considerar una constante  $r(i)$  (que corresponde a los valores especificados para el riego) y una variable de decisión  $\delta r(i)$  para representar la violación del riego especificado, como ilustrado a continuación:

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) + a_t(i) - \varepsilon(v_t(i)) - \sum_{k=1}^K [u_{tk}(i) + s_{tk}(i) + \phi_{tk}(i)] \quad (4.7)$$

$$-r_t(i) + \delta r_t(i) + \sum_{k=1}^K (\sum_{m \in I_U(i)} u_{tm}(m) + \sum_{m \in I_S(i)} s_{tm}(m) + \sum_{m \in I_F(i)} \phi_{tm}(m))$$

para  $i = 1, \dots, I$

donde:

$r_t(i)$	volumen retirado de la central $i$ (riego) en la etapa $t$	$hm^3$	V
$\delta r_t(i)$	violación del riego de la central $i$ en la etapa $t$	$hm^3$	V

La variable de holgura que representa la violación del riego  $\delta r(i)$  tendrá sus límites establecidos por el propio valor del riego como:

$$\delta r_t(i) \leq r_t(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (4.8)$$

La función objetivo penaliza estas variables de holgura (violación de riego) de acuerdo con el tipo del modelo de riego establecido por el usuario:

1. Riego es prioritario a la producción de energía:

$$\mu_r(i) = 1.1 \times \text{costo de déficit} \times [\sum_{m \in J(i)} \rho(v_t(m)) \times \delta r_t(m)]$$

donde:

$J(i)$  conjunto de plantas aguas abajo de la planta  $i$  D

2. La producción de energía es prioritaria al riego:

$$\mu_r(i) = 1.1 \times \text{costo operativo de la térmica más cara} \times [\sum_{m \in J(i)} \rho(v_t(m)) \times \delta r_t(m)]$$

3. Valor de penalidad informado por el usuario:

$$\mu_r(i) = C_{ri} \times \delta r_t(m)$$

donde:

$C_{ri}$  costo fijo proporcionado por el usuario  $k\$/hm^3$  D

#### 4.8 Modelo de volumen muerto

El proceso de llenado de un embalse hasta que el volumen embalsado alcance el nivel mínimo (conocido como “volumen muerto”) tiene efecto sobre la operación tanto de plantas que están aguas arriba como también de plantas ubicadas aguas debajo de la central en proceso de llenado del volumen muerto. Para representar el llenado del volumen muerto se utiliza curva creciente para el almacenamiento mínimo (sección 4.3) como ilustrado por la Figura 4.1 a continuación.

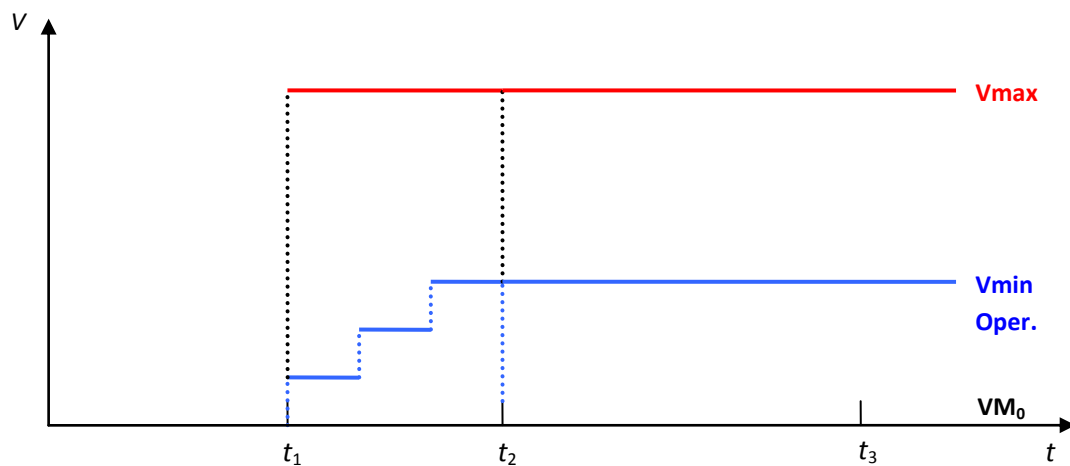


Figura 4.1 – Modelaje del llenado del volumen muerto de una central hidroeléctrica

donde:

$t$	etapa del estudio	D
$t_1$	la etapa inicial del período definido para completar el volumen muerto	D
$t_2$	el número de etapas para completar el volumen muerto	D
$t_3$	la etapa final del período definido para completar el volumen muerto,	D
	$t_2 = t_1 + N$	
$N$	la etapa de entrada en operación	D
$VM_0$	condición del embalse en la primera etapa del período definido para completar el volumen muerto	p.u. D
$V_{max}$	volumen máximo del embalse de los datos de configuración hidroeléctrica	$hm^3$ D
$V_{min}$	volumen mínimo del embalse de los datos de configuración hidroeléctrica	$hm^3$ D
$Q_{max}$	Turbinamiento máximo de los datos de configuración hidroeléctrica	$m^3/s$ D

En este modelo se observan las siguientes variaciones en el tiempo:

- Antes de  $t_1$  la planta es futura, o sea, no produce energía;
- El volumen mínimo, para aquellas plantas que tienen período definido para completar el volumen muerto, no puede ser una restricción dura porque esto puede provocar inviabilidad a partir del período ( $t_1 \leq t$ ) definido para completar el volumen muerto. El volumen mínimo será definido igual a cero y su volumen mínimo real será representado como un volumen mínimo operativo penalizado en la función objetivo;
- El proceso para completar el volumen muerto ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) será realizado a través de una función lineal y creciente por bloques representada por el volumen mínimo operativo y penalizada como  $1.1 \times$  costo de déficit. En este período la planta deja de ser futura solamente para efecto de completar el volumen muerto pero no entra efectivamente en operación;
- A partir de  $t \geq t_2$ , la planta comienza a contribuir para la energía almacenada y energía almacenable máxima, a pesar de no estar en operación. La contribución para el cálculo de



las energías debe ser solamente la debida al volumen del embalse. La productibilidad de esta planta no debe ser acumulada para uso en el cálculo de la energía almacenada. El volumen mínimo operativo será utilizado para calcular el volumen útil de la planta;

- De  $t_3$  en adelante, la planta entra efectivamente en operación.

La Tabla 4.1 presenta un sumario de cómo se representan las variables durante el período de llenado del volumen muerto.

Tabla 4.1 – Parámetros para el proceso de llenado del volumen muerto

Variable/Período	$t < t_1$	$t_1 \leq t < t_2$ ( $k = 1 \dots N - 1$ )	$t_2 \leq t < t_3$	$t_3 \leq t$
Factor de producción	Constante	Constante	Constante	Constante
Volumen mínimo	VM0	VM0	VM0	VM0
Volumen máximo	0	Vmax	Vmax	Vmax
Volumen mínimo operativo	0	$VM0 + (Vmin-VM0) \times (k+1)/N$	Vmin	Vmin
Turbinamiento Máximo	0	0	0	Qmax
Energía Almacenada y Almacenable Máxima	0	0	Contabiliza solamente la contribución de la propia planta.	Contabiliza toda la cascada.

#### 4.9 Canal de desfogue

La altura del canal de desfogue varía en función del desfogue total y esta dependencia influencia el cálculo del factor de producción, dado por:

$$\rho = \Delta h \times g \times \eta \quad (4.9)$$

donde la diferencia de alturas está definida como:

$$\Delta h = h(v) - h(u + s) \quad (4.10)$$

donde:

$v$	volumen almacenado en el embalse
$u$	volumen turbinado
$s$	volumen vertido
$h(v)$	cota del embalse
$h(u + s)$	cota del canal de desfogue

Suponga que  $h(v)$  es constante o calculado a priori en función del volumen del embalse. Suponga también que se informa una tabla  $(h_i, d_i)$  que contiene la información de la cota del canal de desfogue función del desfogue total de la central. Por lo tanto, se puede considerar  $h_i$  la cota del canal de desfogue como representado en la Figura 4.2.

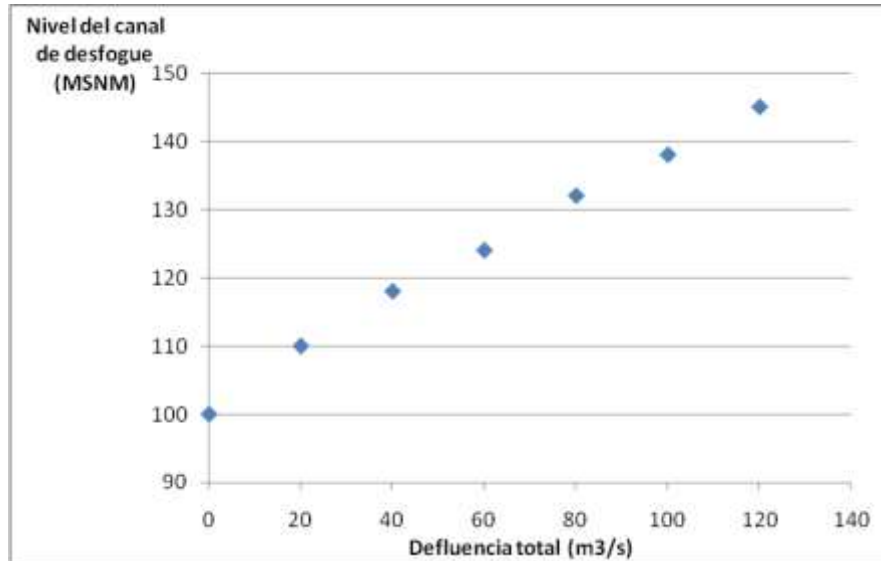


Figura 4.2 – Nivel del canal de desfogue versus desfogue total

A partir de estos cinco intervalos es posible definir los siguientes valores para  $\Delta h$ :

$$\Delta h_i = h(v) - h_i \quad \text{para } d_i \leq d \leq d_{i+1} \quad (4.11)$$

Por lo tanto tendremos un factor de producción para cada intervalo:

$$\rho_i(d) = \Delta h_i \times g \times \eta \quad \text{para } d_i \leq d \leq d_{i+1} \quad (4.12)$$

Finalmente la generación hidroeléctrica para cada segmento estará dada por:

$$E_i = \rho_i(d) \times u \quad \text{para } d_i \leq d \leq d_{i+1} \quad (4.13)$$

La construcción de la curva a continuación se hace a partir de la siguiente tabla:

Tabla 4.2 – Cota del canal de desfogue versus desfogue total

Desfogue total (m3/s)	Cota del canal de desfogue (MSNM)	Factor de producción (MW/m3/s)	Turbina-miento (m3/s)	Generación (MW)
0	100	1.962	0	0.00
20	110	1.766	20	35.32
40	118	1.609	40	64.35
60	124	1.491	60	89.47
80	132	1.334	80	106.73
100	138	1.216	80	97.32
120	145	1.079	80	86.33

Para desfogues totales mayores que el turbinamiento máximo, la generación total va disminuir en función de la altura del canal de desfogue que aumenta con el vertimiento y por lo tanto disminuye el factor de producción.

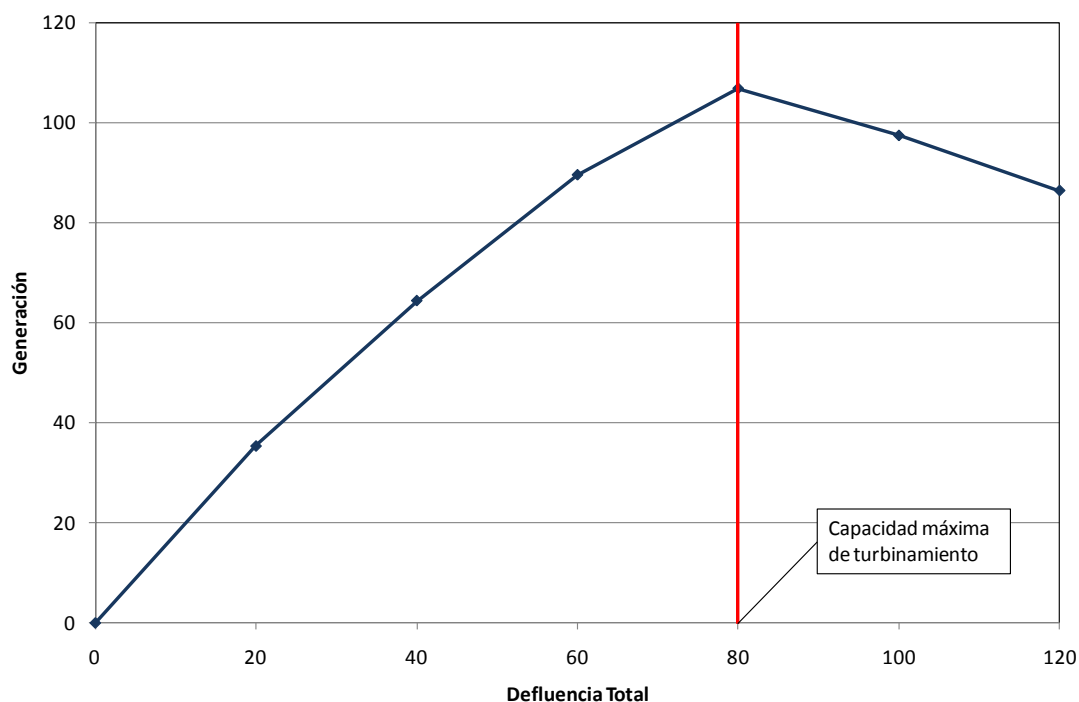


Figura 4.3 – Potencia generada × desfogue

Asociado a cada uno de los segmentos  $i$  se define una recta dada por:

$$a_i (u + s) + b_i \quad (4.14)$$

donde:

$$a_i = (g_{i+1} - g_i) / (d_{i+1} - d_i) \quad \text{y} \quad b_i = g_{i+1} - a_i d_{i+1}$$

y por lo tanto la variación de la generación hidroeléctrica en función de la altura del canal de desfogue puede ser representada a través del siguiente conjunto de restricciones:

$$E_h \leq a_i (u + s) + b_i \quad (4.15a)$$

$$u \leq \bar{u} \quad (4.15b)$$

#### 4.10 Generación en función de la afluencia

Para plantas filo de agua, el turbinamiento es igual a la afluencia total. La utilización de caudales promedio (mensuales o semanales) puede súper-estimar la generación de estas plantas. Una alternativa para modelar la generación de plantas filo de agua de manera más adecuada es definir una tabla que relaciona el caudal turbinable dado el caudal total. Por ejemplo:

Tabla 4.3 – Turbinamiento versus caudal afluente

Caudal total (m <sup>3</sup> /s)	Caudal turbinable (m <sup>3</sup> /s)
$a_t \leq 10$	10
$10 < a_t \leq 20$	19
$20 < a_t \leq 30$	28
$30 < a_t \leq 40$	36
$40 < a_t \leq 50$	38

Una manera de corregir esta sobre-estimativa seria ajustar el factor de producción de la central por un factor que represente que la producción de energía depende del caudal afluente total. Suponga el siguiente ajuste para una central con factor de producción de 1.2 MW/m<sup>3</sup>/s:

Tabla 4.4 – Factor de Producción

Caudal total (m <sup>3</sup> /s)	Caudal turbinable (m <sup>3</sup> /s)	Ajuste de factor de producción	Factor de produc- ción resultante
$a_t \leq 10$	10	1.00	1.20
$10 < a_t \leq 20$	19	0.95	1.14
$20 < a_t \leq 30$	28	0.93	1.12
$30 < a_t \leq 40$	36	0.90	1.08
$40 < a_t \leq 50$	38	0.76	0.91

La generación hidroeléctrica, representada por la variable  $E_h$  para cada intervalo es dada por el producto del factor de producción resultante multiplicado por el caudal total, limitada por la capacidad de turbinamiento de la planta.

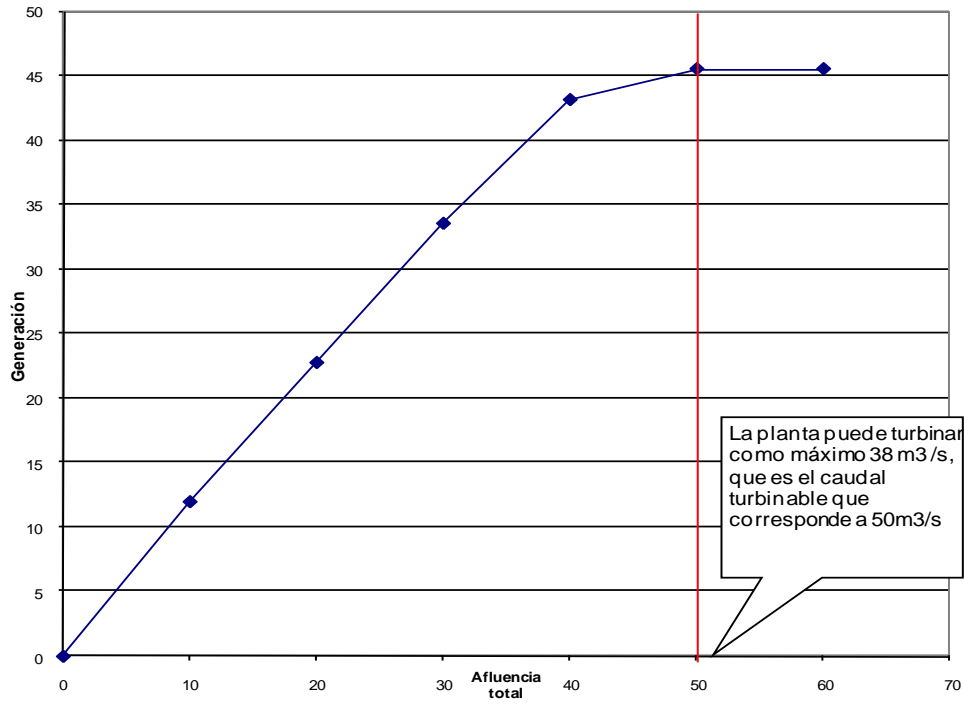


Figura 4.4 – Factor de producción × caudal afluente de plantas filo de agua

Asociado a cada uno de los segmentos  $i$  se define una recta dada por:

$$\phi_i (u + s) + \theta_i \quad (4.16)$$

Donde utilizando los puntos extremos  $(a_i, g_i)$  y  $(a_{i+1}, g_{i+1})$ , se obtiene:

$$\phi_i = (g_{i+1} - g_i) / (a_{i+1} - a_i) \quad \text{y} \quad \theta_i = g_{i+1} - \phi_i a_{i+1}$$

y por lo tanto la variación de la generación hidroeléctrica en función de la afluencia total puede ser representada a través del siguiente conjunto de restricciones:

$$E_h \leq \phi_i (u + s) + \theta_i \quad \text{para } i = 1, \dots, \text{Número de segmentos} \quad (4.17a)$$

$$u \leq \bar{u} \quad (4.17b)$$

#### 4.11 Curva de aversión a riesgo

La Curva de Aversión a Riesgo (CAR) se representa en el modelo SDDP por sistema a través de la siguiente restricción:

$$\sum_{i \in N_r} \sum_{j \in J_i} (\rho(v_t(j)) \times (v_{t+1}(j) - \underline{v}_t(j)) \times f_{vutil}(j) + \delta_t \geq f_{ea} \times \sum_{i \in N_r} \sum_{j \in J_i} (\bar{\rho}(j) \times (\bar{v}_t(j) - \underline{v}_t(j)) \times f_{vutil}(j)) \quad (4.18)$$

donde:

$i, j$	índices para los embalses		
$N_r$	número de embalses del sistema		
$J_i$	conjunto de plantas hidroeléctricas aguas abajo de la planta $i$		
$\rho(v_t(j))$	coeficiente de producción para cálculo de la energía almacenada de la CAR, de la planta $j$ en la etapa $t$ , calculado en función del volumen del embalse	$MWh/hm^3$	V
$\bar{\rho}(j)$	coeficiente de producción promedio para cálculo de la energía almacenable máxima, de la planta $j$	$MWh/hm^3$	D
$v_{t+1}(j)$	almacenamiento final de $j$ en la etapa $t$	$hm^3$	V
$\underline{v}_t(j)$	almacenamiento mínimo de $j$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$\bar{v}_t(j)$	almacenamiento máximo de $j$ en la etapa $t$	$hm^3$	D
$f_{vutil}(j)$	factor de participación del volumen de la planta $j$ en el sistema	$p.u$	D
$\delta_t$	variable de holgura asociada a la restricción de la curva de aversión a riesgo en la etapa $t$	$MWh$	V
$f_{ea}$	factor de la curva de aversión a riesgo	$p.u$	D

La variable de holgura entra en la función objetivo con un coeficiente de penalidad expresado en \$/MWh. Ella indica cual es el recurso más caro que se desea utilizar para evitar la violación del nivel de almacenaje establecido por la Curva de Aversión a Riesgo. El usuario puede seleccionar el tipo de penalización que desea asociar a la violación de la Curva de Aversión a Riesgo. Las siguientes dos posibilidades están disponibles en el programa.

- Penalidad de referencia: corresponde a un valor constante, informado por el usuario o calculado automáticamente por el modelo. Es la opción padrón ( $1.1 \times \text{Costo de la térmica más cara}$ ) determina que esta restricción no será atendida únicamente con la finalidad de evitar un racionamiento en el sistema.
- Penalidad reducida: corresponde a un valor de penalidad calculado automáticamente en función del valor del agua para cada etapa y escenario hidrológico.

En la recursión backward existen dos opciones adicionales para corrección del factor de penalización. En la primera se determina la penalización reducida para el primer escenario condicionado (abertura) de cada serie y se asume que este valor es una buena aproximación para las aberturas restantes. En la segunda opción, el programa determina una penalización reducida individualizada para cada escenario condicionado.

#### 4.12 Energía de alerta para un conjunto de embalses

La siguiente restricción determina una cantidad mínima de energía de alerta a ser atendida por un conjunto de embalses.

$$\sum_{i \in U_r} \rho(v_t(i)) \times v_t(i) + \delta a_t(r) \geq \underline{ea}_t(r) \quad (4.19)$$

para  $r = 1, \dots, R_a$ 

donde

$R_a$	conjunto de restricciones de energía de alerta		
$U_r$	conjunto de embalses para la restricción de energía de alerta $r$		
$\delta a_t(r)$	violación da energía de alerta $r$ en la etapa $t$	MWh	V
$\underline{ea}_t(r)$	energía de alerta $r$ en la etapa $t$	MWh	D

La variable de holgura que representa la violación de las restricciones de energía de alerta es considerada en la función objetivo, multiplicada por un coeficiente de penalidad (\$/MWh), informado por el usuario o calculado automáticamente por el modelo como:

$$\mu_r(i) = 1.1 \times \text{costo de la térmica más cara}$$

#### 4.13 Energía mínima de seguridad para un conjunto de embalses

La siguiente restricción determina una cantidad mínima de energía de seguridad a ser atendida por un conjunto de embalses.

$$\sum_{i \in U_r} \rho(v_t(i)) \times v_t(i) + \delta m_t(r) \geq \underline{em}_t(r) \quad (4.20)$$

para  $r = 1, \dots, R_s$ 

donde

$R_s$	conjunto de restricciones de energía de seguridad		
$U_r$	conjunto de embalses para la restricción de energía de seguridad $r$		
$\delta m_t(r)$	violación de la energía de seguridad $r$ en la etapa $t$	MWh	V
$\underline{ea}_t(r)$	energía de seguridad $r$ en la etapa $t$	MWh	D

La variable de holgura que representa la violación de las restricciones de energía de seguridad es considerada en la función objetivo, multiplicada por un coeficiente de penalidad (\$/MWh), informado por el usuario o calculado automáticamente por el modelo como:

$$\mu_r(i) = 1.1 \times \text{costo de déficit}$$

#### 4.14 Energía de espera para un conjunto de embalses

La siguiente restricción determina una cantidad máxima de energía de espera a ser atendida por un conjunto de embalses.

$$\sum_{i \in U_r} \rho(v_t(i)) \times v_t(i) \leq \overline{ee}_t(r) \quad (4.21)$$

para  $r = 1, \dots, R_e$ 

donde

$R_e$	conjunto de restricciones de energía de espera
-------	--

$U_r$	conjunto de embalses para la restricción de energía de espera $r$		
$\overline{ee}_t(r)$	energía de espera $r$ en la etapa $t$	$MWh$	D



## 5 RESTRICCIONES OPERATIVAS ADICIONALES – PLANTAS TÉRMICAS

### 5.1 Centrales térmicas con costos lineales por parte

El factor de consumo de centrales térmicas (en unidades de combustible/MWh) se representa variable hasta un máximo de tres valores de acuerdo al despacho de la central, como se muestra en la Figura 5.1 a continuación.

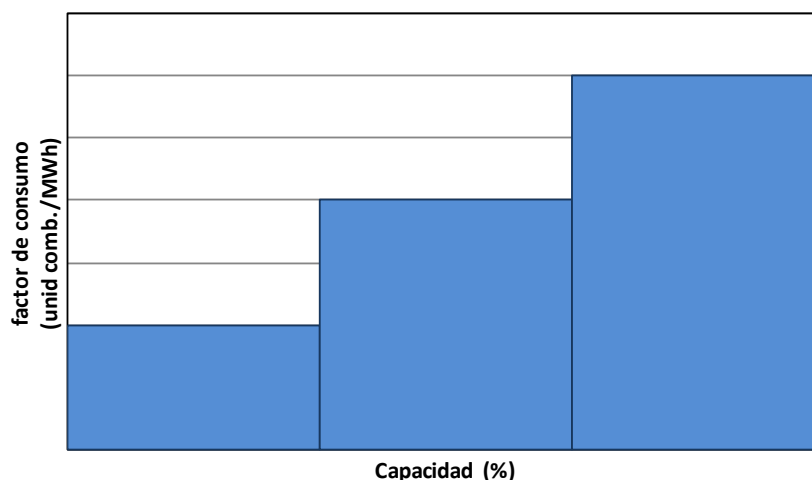


Figura 5.1 – Factor de consumo en función de la producción de la central térmica

En este caso el costo operativo de la central térmica resulta en una función lineal por partes, como ilustrado en la Figura 5.2.

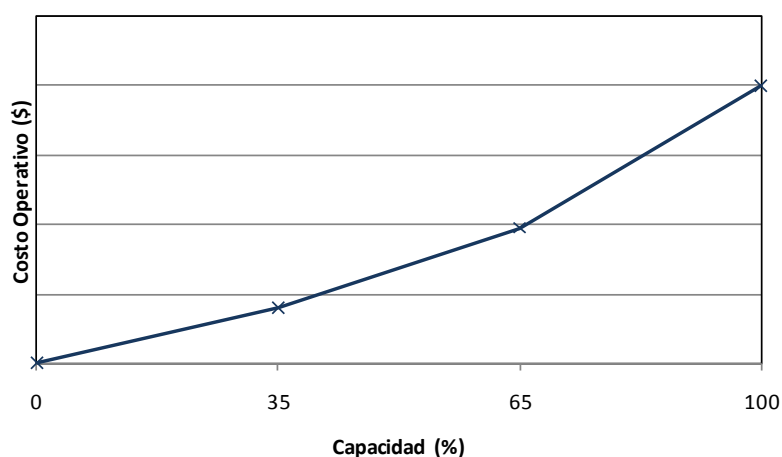


Figura 5.2 – Costo operativo térmico por una función lineal por partes

Se observa que los costos operativos unitarios son no decrecientes. Internamente, este tipo de central se representa con tres variables de generación térmica, cada una con un costo unitario de  $c(j, h)$  \$/MWh, para  $h = 1, 2, 3$ . Estas variables tienen los siguientes límites operativos:

$$0 \leq g_{tk}(j, h) \leq \sigma(j, h) \times \bar{g}_{tk}(j) \text{ para } j = 1, \dots, J; h = 1, 2, 3; k = 1, \dots, K \quad (5.1)$$

donde:

$c(j, h)$	costo unitario de la térmica $j$ en el tramo $h$		D
$g_{tk}(j, h)$	generación de la central térmica $j$ en el tramo $h$	MWh	V
$\sigma(j, h)$	factor de participación del tramo $h$ en la capacidad total	p.u	D

La generación total de la central en la etapa  $t$ , escalón  $k$ , es, por lo tanto, calculada como la suma de las variables generación de cada tramo:

$$g_{tk}(j) = \sum_{h=1}^3 g_{tk}(j, h) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (5.2)$$

De forma similar, en la función objetivo del problema de despacho el costo de producción de la térmica se calculará por:

$$\sum_{h=1}^3 c(j, h) \times g_{tk}(j, h) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (5.3)$$

Cabe observar que si para la central térmica  $j$  se representan restricciones de generación mínima mayores que cero, las restricciones de límite operativo se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Min } \left\{ \underline{g}_{tk}(j) - \sum_{i < h} \sigma(j, i) \times \bar{g}_{tk}(j); \sigma(j, h) \times \bar{g}_{tk}(j) \right\} \leq \\ g_{tk}(j, h) \leq \sigma(j, h) \times \bar{g}_{tk}(j) \end{aligned} \quad (5.4)$$

para  $j = 1, \dots, J; h = 1, 2, 3, k = 1, \dots, K$

## 5.2 Centrales térmicas *must-run*

Estas centrales se caracterizan por tener que generar, de forma forzada, su capacidad máxima. En este caso las restricciones de límite de generación térmica para centrales para este tipo de central se substituyen por las siguientes restricciones:

$$g_{tk}(j) = \bar{g}_{tk}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (5.5)$$

## 5.3 Límites en el consumo de combustible

La restricción representa límites en la disponibilidad de un combustible en la etapa:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j \in \Phi(l)} \varphi(j) \times g_{tk}(j) \leq \bar{\Phi}_t(l) \quad \text{para } l = 1, \dots, F \quad (5.6)$$

donde:

$l$	índice de los combustibles
$F$	número de combustibles
$\Phi(l)$	conjunto de térmicas que utilizan el combustible $l$

$\varphi(j)$	factor de consumo de la central $j$	UC / MWh	D
$\Phi_t(l)$	disponibilidad del combustible de la central $l$ en la etapa $t$	UC	D

#### 5.4 Límites en la tasa de consumo de combustible

La restricción representa límites en la tasa de consumo de un combustible en la etapa, debido, por ejemplo, a la dimensión de un gaseoducto.

$$\sum_{j \in \Phi(l)} \varphi(j) \times g_{tk}(j) \leq \tau_t(l) \times h(k) \quad \text{para } l = 1, \dots, F; k = 1, \dots, K \quad (5.7)$$

donde:

$l$	índice de los combustibles		
$F$	número de combustibles		
$\Phi(l)$	conjunto de térmicas que utilizan el combustible $l$		
$\varphi(j)$	factor de consumo de la central $j$	UC / MWh	D
$\tau_t(l)$	tasa máxima de consumo del combustible $l$ en la etapa $t$	UC/hora	D
$h(k)$	duración del escalón $k$	horas	D

#### 5.5 Restricciones de generación mínima para grupos de centrales térmicas

Las restricciones de generación mínima son necesarias por ejemplo para aporte de reactivos. Cuando son individuales se representan como los límites inferiores de las variables de generación térmica<sup>3.9</sup>). Para grupos de centrales térmicas se representa la siguiente restricción:

$$\sum_{j \in J_r} g_{tk}(j) \geq \underline{G}_{tk}(r) \quad \text{para } r = 1, \dots, R; k = 1, \dots, K \quad (5.8)$$

donde:

$r$	índice de los grupos de centrales térmicas		
$R$	número de grupos de centrales térmicas		
$J_r$	conjunto de térmicas que pertenecen al grupo $r$		
$\underline{G}_{tk}(r)$	generación mínima para el grupo $r$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D

Observe que en la implementación de esta restricción existe la limitación de que cada unidad térmica sólo puede participar en una restricción de generación mínima.

#### 5.6 Restricciones de generación

Estas restricciones son una generalización de las anteriores. Pueden combinar unidades hidroeléctricas y térmicas y pueden limitar su generación total inferior o superiormente. Además cada generador hidroeléctrico o térmico puede participar en más de una restricción.

La expresión general es:

$$\underline{G}_{tk}(r) \leq \sum_{i \in I_r} g_{tk}(i) + \sum_{j \in J_r} g_{tk}(j) \leq \overline{G}_{tk}(r) \quad \text{para } r = 1, \dots, R; k = 1, \dots, K \quad (5.9)$$

donde:

$r$	índice de las restricciones de generación		
$R$	número de restricciones de generación		
$I_r$	conjunto de hidroeléctricas que pertenecen a la restricción $r$		
$J_r$	conjunto de térmicas que pertenecen a la restricción $r$		
$\underline{G}_{tk}(r)$	Límite inferior de la restricción $r$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$\overline{G}_{tk}(r)$	Límite superior de la restricción $r$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D

### 5.7 Centrales térmicas multi-combustible

Una central térmica multi-combustible se representa como un grupo de centrales térmicas que comparten datos que son iguales, por ejemplo, generación mínima, factores de indisponibilidad y otros que son particulares al combustibles que está en uso, datos de consumo, costo operativo, generación máxima. De esta manera la variable de generación  $g_{tk}(j)$  se substituye por un conjunto de variables  $g_{tk}(j)$ , cada una de ellas representando la parte de generación de la térmica  $j$  correspondiente a cada uno de los combustibles alternativos. Para representar la capacidad variable por los combustibles se define una variable  $p_{tk}(i)$  que asume valores entre 0 y 1. La generación total de este grupo de plantas térmicas debe satisfacer la siguiente restricción:

$$g_{tk}(i) - \overline{g}_{tk}(j) \times p_{tk}(i) \leq 0 \quad \text{para } i \in M(j); j \in J \quad (5.10a)$$

$$0 \leq \sum_{i \in M(j)} p_{tk}(i) \leq 1 \quad \text{para } j \in J \quad (5.10b)$$

donde:

$M(j)$	conjunto de variables de generación térmica que representan la generación de cada combustibles en la central multi-combustible $j$
$p_{tk}(i)$	parte de la capacidad utilizada para producción por el combustible $i$ en la central térmica $j$
$J$	Conjunto de térmicas multi-combustible

De forma similar al caso en que los costos operativos se representan por una función lineal por partes, las generaciones variables asociadas a térmicas multi-combustibles son consideradas en las restricciones de una central térmica. Por ejemplo, caso la central  $j$  es multi-combustible y *must-run*, se modifica la ecuación (5.10a) para:

$$g_{tk}(i) - \overline{g}_{tk}(j) \times p_{tk}(i) \leq 0 \quad \text{para } i \in M(j) \quad (5.11)$$

Similarmente, la función objetivo de problema de despacho se modifica para:

$$\sum_{i \in M(j)} c(i) g_{tk}(i) \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (5.12)$$

donde:

$c(i)$  costo operativo de la térmica  $j$  considerando el combustible representado por la variable de generación  $g_{tk}(i)$  \$/MWh D

Se destaca que es posible combinar centrales térmicas multi-combustible con otros atributos de una central térmica, por ejemplo, costos operativos representados por una linear por partes y must-run.

## 5.8 Centrales térmicas tipo unit commitment

Las centrales térmicas tipo *commitment* representan aquellas para las cuales está asociado un costo de arranque. La decisión de despachar una central térmica de este tipo puede ser realizada para cada etapa o cada escalón de demanda dentro de la etapa. En ambos casos estas centrales se modelan usando variables de decisión entera (0/1). De esta forma la representación de este tipo de centrales requiere la utilización de algoritmos de programación entera mixta, lo que introduce una complicación de tipo computacional en el modelo. Si el número de estas centrales no es muy elevado este aspecto no es muy importante.

Si la decisión de despachar se realiza una vez en la etapa, los límites de generación se representan con las siguientes restricciones.

$$g_{tk}(j) - \bar{g}_{tk}(j) \times x_t(j) \leq 0 \quad \text{para } j \in C; k = 1, \dots, K \quad (5.13a)$$

$$g_{tk}(j) - \underline{g}_{tk}(j) \times x_t(j) \geq 0 \quad \text{para } j \in C; k = 1, \dots, K \quad (5.13b)$$

$$x_t(j) \in \{0,1\} \quad \text{para } j \in C \quad (5.13c)$$

donde:

$C$  conjunto de las centrales térmicas tipo *commitment* \$/MWh D  
 $x_t(j)$  decisión de despachar la central térmica  $j$  (variable entera 0/1) en la etapa  $t$  p.u V

Se incluye en la función objetivo la variable de decisión multiplicada por el costo de arranque correspondiente:

$$\sum_{j \in C} c_a(j) \times x_t(j) \quad (5.14)$$

donde:

$c_a(j)$  costo de arranque de la central térmica  $j$  k\$ D

Si la decisión de despachar la central térmica se realiza a cada escalón, entonces las restricciones resultan:

$$g_{tk}(j) - \bar{g}_{tk}(j) \times x_{tk}(j) \leq 0 \quad \text{para } j \in C; k = 1, \dots, K \quad (5.15a)$$

$$g_{tk}(j) - \underline{g}_{tk}(j) \times x_{tk}(j) \geq 0 \quad \text{para } j \in C; k = 1, \dots, K \quad (5.15b)$$

$$x_{tk}(j) \in \{0,1\} \quad \text{para } j \in C; k = 1, \dots, K \quad (5.15c)$$

y el término que debe ser incluido en la función objetivo es:

$$\sum_{j \in C} \sum_{k \in K} c_a(j) \times x_{tk}(j) \quad (5.16)$$

donde:

$$x_{tk}(j) \quad \text{decisión de despachar la central térmica en el escalón } k \quad p.u \quad \forall$$

## 5.9 Plantas térmicas con contrato de combustible

En un contrato Take or Pay (ToP), el generador “pre-compra” una dada cantidad de combustible, el cual puede ser utilizado durante todo el periodo de duración del contrato. En cada etapa, el generador decide el montante de combustible que será retirado de su “cuenta” de contrato. Este combustible puede ser utilizado para producir energía y/o ser almacenado en un reservorio físico de combustible para utilización futura. Al final del contrato, cualquier cantidad remaneciente de combustible en la “cuenta” es generalmente perdida. En algunos contratos ToP especiales, una fracción remaneciente puede ser transferida para el contrato siguiente. Finalmente, el generador puede también comprar combustible adicional del mercado spot, a precios mayores.

Los parámetros de un contrato de combustible ToP son la duración (número de etapas), los volúmenes mínimo y máximo y una tasa de disponibilidad. Como mencionado, el volumen mínimo de combustible es un valor pre-pago (valor ToP). De esta manera, cada contrato de suministro de combustible puede ser modelado por dos reservorios, uno representando el componente ToP, y el otro la posibilidad de comprar combustible adicional hasta su capacidad máxima. Un tercero reservorio es utilizado para representar el almacenamiento físico de combustible, cuando el mismo está disponible.

Los niveles de almacenaje de los reservorios de combustible formarán parte de las variables de estado del SDDP y serán incorporadas en el procedimiento de la etapa backward del algoritmo del SDDP, donde aproximaciones lineales de la función de costo futuro (FCF) son construidas.

Por simplicidad de notación, iremos ilustrar el modelo de contrato de combustible para el caso con solamente un contrato de combustible ToP, un reservorio físico de combustible y una única planta térmica. Los siguientes términos serán adicionados a la función objetivo.

$$\alpha_t(w_t, y_t, z_t) = \text{Min}\{Cc \times (\sum_{k=1}^K f y_{tk}(j) + \sum_{k=1}^K f y_{tk}(r))\} - \alpha_{t+1}(w_{t+1}, y_{t+1}, z_{t+1}) \quad (5.17)$$

Observe que el montante fijo del contrato correspondiente a la parte ToP no es adicionado a la función objetivo porque él no afecta el proceso de optimización. Su contribución es adicionada separadamente en los informes de salida.

Las ecuaciones de balance para el contrato de combustible (ToP y compra adicional) se presentan a continuación:

$$w_{t+1} = w_t + aw_t - \sum_{k=1}^K fw_{tk}(j) - \sum_{k=1}^K fw_{tk}(r) - sw_t \quad (5.18)$$

$$0 \leq w_{t+1} \leq \bar{w} \quad (5.19)$$

$$y_{t+1} = y_t + ay_t - \sum_{k=1}^K fy_{tk}(j) - \sum_{k=1}^K fy_{tk}(r) - sy_t \quad (5.20)$$

$$0 \leq y_{t+1} \leq \bar{y} \quad (5.21)$$

El contrato tiene un límite de disponibilidad, por bloque.

$$0 \leq fw_{tk}(j) + fw_{tk}(r) + fy_{tk}(j) + fy_{tk}(r) \leq \bar{f}c_k \quad (5.22)$$

El reservorio físico de combustible es por su vez representado por el balance del reservorio y sus límites de inyección y de retirada.

$$z_{t+1} = z_t + \sum_{k=1}^K fw_{tk}(r) + \sum_{k=1}^K fy_{tk}(r) - \sum_{k=1}^K fz_{tk}(j) \quad (5.23)$$

$$\underline{y} \leq y_{t+1} \leq \bar{y} \quad (5.24)$$

$$0 \leq fw_{tk}(r) + fy_{tk}(r) \leq \bar{f}r_k \quad (5.25)$$

$$0 \leq fz_{tk}(j) \leq \bar{f}r_k \quad (5.26)$$

Finalmente, se representa el balance de combustible por planta térmica.

$$fw_{tk}(j) + fy_{tk}(j) + fz_{tk}(j) - \varphi(j) \times g_{tk}(j) = 0 \quad (5.27)$$

donde:

$r$	índice para el reservorio físico de combustible		
$w_{t+1}$	almacenaje final del reservorio del contrato, parcela ToP, al final de la etapa $t$	UC	V
$\bar{w}$	límite de almacenaje del reservorio ToP de combustible	UC	D
$y_{t+1}$	almacenaje final del reservorio adicional del contrato, al final de la etapa $t$	UC	V
$\bar{y}$	límite de almacenaje del reservorio adicional de combustible	UC	D
$z_{t+1}$	almacenaje final del reservorio de combustible al final de la etapa $t$	UC	V
$\underline{z}$	límite mínimo de almacenaje del reservorio físico de combustible	UC	D
$\bar{z}$	límite máximo de almacenaje del reservorio físico de combustible	UC	D
$Cc$	costo del contrato de combustible	\$/UC	D
$fw_{tk}(j)$	montante del contrato de combustible ToP consumido por la planta térmica $j$ en la etapa $t$ y en el bloque $k$	UC	V
$fw_{tk}(r)$	montante del contrato de combustible ToP almacenado en el reservorio físico del combustible $r$ en la etapa $t$ y en el bloque $k$	UC	V
$fy_{tk}(j)$	montante adicional del contrato de combustible consumido por la planta térmica $j$ en la etapa $t$ y en el bloque $k$	UC	V
$fy_{tk}(r)$	montante adicional del contrato de combustible almacenado en el reservorio físico de combustible $r$ en la etapa $t$ y en el bloque $k$	UC	V

$aw_t$	afluencia del contrato de combustible ToP. Este valor corresponde al montante total del ToP, siendo solamente diferente de cero al inicio y renovación del contrato.	UC	D
$sw_t$	vertimiento del contrato de combustible ToP	UC	V
$ay_t$	afluencia adicional del contrato de combustible. Este valor corresponde al montante adicional de contrato, siendo solamente diferente de cero al inicio y renovación del contrato.	UC	D
$sy_t$	vertimiento adicional del contrato de combustible	UC	V
$\overline{f}c_k$	disponibilidad del contrato de combustible en el bloque $k$	UC	D
$fz_{tk}(j)$	montante de almacenaje del reservorio físico de combustible consumido por la planta térmica $j$ en la etapa $t$ y en el bloque $k$	UC	V
$\overline{I}fr_k$	inyección máxima en el reservorio físico de combustible en el bloque $k$	UC	D
$\overline{R}fr_k$	retirada máxima del reservorio de combustible en el bloque $k$	UC	D



## 6 RESTRICCIONES OPERATIVAS ADICIONALES – RESERVA DE GENERACIÓN

### 6.1 Reserva rodante

La reserva rodante es un margen operativo dado en MW para cada etapa y escalón de demanda, para ajustar la operación en tiempo real a las desviaciones con respecto a la operación programada.

#### 6.1.1 Reserva rodante para centrales hidroeléctricas

En el caso de centrales hidroeléctricas la reserva rodante se representa como un valor que se sustrae de la máxima capacidad de la planta. En este caso la restricción de turbinamiento máximo resulta:

$$u_{tk}(i) \leq \text{Min} \left( \bar{u}_{tk}(i), \frac{\bar{g}_{tk}(i)}{\rho(v_t(i))} \right) - \frac{r_{tk}(i)}{\rho(v_t(i))} \quad \text{para } i = 1, \dots, I; k = 1, \dots, K \quad (6.1)$$

donde:

$r_{tk}(i)$  reserva rodante de la central  $i$ , etapa  $t$ , escalón  $k$       MW      D

#### 6.1.2 Reserva rodante para centrales térmicas

En el caso de centrales térmicas la reserva rodante se representa a través de la siguiente restricción:

$$g_{tk}(j) \leq \bar{g}_{tk}(j) - r_{tk}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (6.2)$$

donde:

$r_{tk}(j)$  reserva rodante de la central  $j$ , etapa  $t$ , escalón  $k$       MW      D

Cabe observar que cuando la central térmica tiene una función de costos por tramos, la restricción resultante es:

$$\sum_{h=1}^3 g_{tk}(j, h) \leq \bar{g}_{tk}(j) - r_{tk}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (6.3)$$

### 6.2 Restricciones de reserva de generación

Estas restricciones de reserva de generación pueden combinar unidades hidroeléctricas y térmicas. Existen tres opciones de representación, cuya expresión es detallada a seguir:

1. La reserva de generación debe ser mayor o igual a un porcentaje de la demanda del sistema:

$$\sum_{i \in I(r)} (\bar{g}_{tk}(i) - g_{tk}(i)) + \sum_{j \in J(r)} (\bar{g}_{tk}(j) - g_{tk}(j)) \geq f(r) \times d_{tk} \quad (6.4)$$

para  $r = 1, \dots, R_1; k = 1, \dots, K$

2. La reserva de generación compensa la salida de operación de cualquier unidad generadora del sistema que no pertenece al conjunto de reserva:

$$\sum_{i \in I(r)} (\bar{g}_{tk}(i) - g_{tk}(i)) + \sum_{j \in J(r)} (\bar{g}_{tk}(j) - g_{tk}(j)) \geq g_{tk}(s) \quad \text{para } s \notin I(r) \cup J(r) \quad (6.5)$$

para  $r = 1, \dots, R_2; k = 1, \dots, K$

3. La reserva de generación compensa la salida de operación de cualquier unidad generadora del sistema que pertenece al conjunto de reserva.

$$\sum_{m \in I(r) \cup J(r) - s} (\bar{g}_{tk}(m) - g_{tk}(m)) \geq g_{tk}(s) \quad \text{para } s \in I(r) \cup J(r) \quad (6.6)$$

para  $r = 1, \dots, R_3; k = 1, \dots, K$

donde:

$r$	índice de las restricciones de generación		
$R_1$	número de restricciones de generación tipo 1		
$R_2$	número de restricciones de generación tipo 2		
$R_3$	número de restricciones de generación tipo 3		
$I(r)$	conjunto de hidroeléctricas que pertenecen a la restricción $t$		
$J(r)$	conjunto de térmicas que pertenecen a la restricción $r$		
$f(r)$	factor de la demanda correspondiente a la restricción de reserva $r$	$p.u$	D
$d_{tk}$	demanda de la etapa $t$ , escalón $k$	$GWh$	D

## 7 FUENTES DE ENERGÍA RENOVABLE

El SDDP permite representar fuentes de energía renovable: centrales eólicas, pequeñas centrales hidroeléctricas, centrales de biomasa, etc. La representación adoptada en el SDDP presupone que el aporte de estas centrales es independiente de una etapa para la siguiente, i.e. la correlación serial es nula. Sin embargo, se preserva una característica importante que es la correlación espacial; por ejemplo, es posible representar la correlación espacial entre aportes en centrales eólicas en una misma región, donde las variaciones del viento son parecidas.

El usuario suministra escenarios estacionales de generación, que pueden ser registros históricos o generados por algún modelo externo. Antes de iniciar el proceso iterativo para cálculo de la política, el SDDP determina los escenarios que serán utilizados de la siguiente manera: para cada etapa  $t$  y para cada escenario de caudales condicionados  $s$  (apertura en la backward), se sortea un escenario de aporte de energía renovable entre los informados por el usuario para ese mes. Estos escenarios son utilizados en la fase backward.

En la fase de simulación forward se utilizan los mismos escenarios y si el número de series forward es mayor que el número de aberturas, se aplica un esquema de carrusel.

En el caso de una simulación separada, el modelo permite utilizar los mismos escenarios utilizados en la política o bien sortear directamente del archivo de escenarios del usuario. Para mayores detalles, referirse a los manuales de descripción de archivos y de usuario.

En el modelo matemático los aportes de las fuentes de energía renovable son descontados de la demanda, como mostrado a continuación:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cg + \alpha \\ & g + r = d' \\ & r \leq d' \end{aligned}$$

donde  $d' = d - ER$ , siendo  $ER$  la suma de los aportes de fuentes de energía renovable en el sistema en esa etapa y serie.

## 8 RED DE TRANSPORTE DE ENERGÍA

Existen dos diferentes formas para representar las restricciones de la red de transmisión: a través de un modelo de interconexiones, que se encuentra descrito en esta sección; o a través del modelo de flujo de potencia linealizado, que está descrito en la próxima sección.

### 8.1 Modelo de interconexión

El modelo de interconexiones representa los límites para cambios de energía entre sistemas vecinos. En este caso es necesario definir una ecuación de suministro de la demanda para cada sistema y modelar los límites para la transferencia de energía entre ellos:

La demanda del sistema es compuesta por partes elásticas e inelásticas. Todas las partes son opcionales, siendo que la demanda puede ser puramente inelástica, puramente elástica o una combinación de ambas.

$$d_{tk}(s) = \sum_{i \in In(s)} d_{tk}^i(s, i) + \sum_{e \in El(s)} \sum_{p \in P(s)} d_{tk}^e(s, e, p)$$

$$0 \leq d_{tk}^e(s, l, p) \leq \overline{d_{tk}^e}(s, l, p)$$

para  $s = 1, \dots, S$ ;  $k = 1, \dots, K$   
 $l = 1, \dots, L(l)$ ;  $p = 1, \dots, P(p)$

donde

$s$	índice dos sistemas o regiones		
$S$	número de sistemas		
$i$	índice de la parte inelástica de la demanda		
$In(s)$	números de demandas inelásticas del sistema $s$		
$e$	índice de la parte elástica de la demanda		
$El(s)$	números de demandas elásticas del sistema $s$		
$p$	índice del segmento de la parte elástica de la demanda		
$P(s)$	números de segmentos de la parte elástica de la demanda $l$		
$d_{tk}(s)$	demanda de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	V
$d_{tk}^i(s, i)$	demanda inelástica $i$ de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	D
$d_{tk}^e(s, e, p)$	segmento $p$ de la parte $e$ de demanda elástica de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	V
$\overline{d_{tk}^e}(s, e, p)$	límite máximo del segmento $p$ de la parte $e$ de demanda elástica de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	D

La ecuación de suministro de la demanda es representada por:

$$\sum_{i \in I(s)} g_{tk}(i) + \sum_{j \in J(s)} g_{tk}(j) + \sum_{l \in \Omega(s)} (\omega_{tk}(l, s) - \omega_{tk}(s, l)) + r_{tk}(s) = d_{tk}(s) \quad (8.1)$$

$$\omega_{tk}(l, s) \leq \bar{\omega}_{tk}(l, s)$$

$$0 \leq r_{tk}(s) \leq \sum_{i \in I_n(s)} d_{tk}^i(s, i)$$

para  $s = 1, \dots, S$ ;  $k = 1, \dots, K$

donde

$s$	índice dos sistemas o regiones		
$S$	número de sistemas		
$I(s)$	conjunto de plantas hidráulicas en el sistema $s$		
$J(s)$	conjunto de plantas térmicas en el sistema $s$		
$\Omega(s)$	conjunto de sistemas conectados al sistema $s$		
$\omega_{tk}(l, s)$	energía transferida del sistema $l$ para el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	V
$\bar{\omega}_{tk}(l, s)$	capacidad de interconexión entre los sistemas $l$ e $s$	MWh	D
$r_{tk}(s)$	déficit de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , bloque $k$	MWh	V

La función objetivo considera un costo variable que depende del bloque, de la variable de interconexión, del costo de déficit de la parte inelástica de la demanda y del precio asociado a la parte elástica de la demanda, como se describe a seguir.

$$\text{Min} \left( \sum_{l \in \Omega(s)} (c(l, s) \times \omega_{tk}(l, s) + c(s, l) \times \omega_{tk}(s, l)) + cr(s) \times r_{tk}(s) - \sum_{e \in EI(s)} \sum_{p \in P(s)} (c_{tk}^e(s, e, p) \times d_{tk}^e(s, e, p)) \right) \quad (8.2)$$

donde

$c(l, s)$	costo de transferencia de energía del sistema $l$ para el sistema $s$	\$/MWh	D
$c(s, l)$	costo de transferencia de energía del sistema $s$ para el sistema $l$	\$/MWh	D
$cr(s)$	costo de déficit de energía del sistema $s$	\$/MWh	D
$c_{tk}^e(s, e, p)$	precio máximo del segmento $p$ de la parte elástica de la demanda $e$ en el sistema $s$	\$/MWh	D

#### 8.1.1 Restricción de suma de intercambios

Estas restricciones permiten representar límites mínimos y máximos para un conjunto de líneas de interconexión seleccionadas por el usuario. Representando  $k$  como el índice del escalón de carga y  $t$  como el índice de tiempo, ellas pueden ser representadas por:

$$I_{tk}(si) \leq \sum_{m \in K(si)} I_{tk}(m, si) \leq \bar{I}_{tk}(si) \text{ para } si = 1, \dots, N_{si}; k = 1, \dots, K \quad (8.3)$$

donde:

$si$	índice de la restricción de suma de intercambio		
$N_{si}$	número de restricciones de suma de intercambios		
$K(si)$	número de líneas de interconexión pertenecientes a la restricción de suma de intercambios $si$		
$I_{tk}(m, si)$	intercambio de la línea de interconexión $m$ , en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	V

$L_{tk}(si)$	límite inferior de la restricción de suma de intercambios $si$ , en la etapa $t$ , escalón $k$	$MWh$	D
$\bar{I}_{tk}(si)$	límite superior de la restricción de suma de intercambios $si$ , en la etapa $t$ , escalón $k$	$MWh$	D

## 8.2 Modelo de flujo de potencia linealizado

El modelo de flujo de potencia activa linealizado se compone de dos conjuntos de ecuaciones, correspondientes a la primera y segunda leyes de Kirchhoff y a las restricciones de límite de flujo en los circuitos.

### 8.2.1 Primera ley de Kirchhoff

La primera ley representa la ecuación de balance de energía en cada nodo (con el objetivo de simplificar la notación suponemos que existe un único generador en cada nodo):

$$\sum_{m \in \Omega(n)} f(m) + g(n) = d(n) \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (8.4)$$

donde:

$n$	índice de los nodos		
$N$	número de nodos		
$g(n)$	generación en el nodo $n$	$MWh$	V
$d(n)$	demanda en el nodo $n$	$MWh$	D
$m$	índice de los circuitos		
$M$	número de circuitos		
$f(m)$	flujo de potencia en el circuito $m$	$MWh$	V
$\Omega(n)$	conjunto de circuitos conectados directamente con el nodo $n$		

El conjunto de las ecuaciones (8.4) se escribe en forma matricial como:

$$Sf + g = d \quad (8.5)$$

donde:

$S$  Matriz de incidencia  $N \times M$  que representa las conexiones nodo-circuito: la columna  $m$  de la matriz  $S$  contiene ceros en todas las posiciones excepto en las posiciones correspondientes a los nodos terminales del  $m$ -ésimo circuito, a saber,  $n_F(m)$  y  $n_T(m)$

$$S(:, m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{nodo DE } n_F(m) \\ \leftarrow \text{nodo PARA } n_T(m) \end{matrix}$$

$f$  vector M-dimensional de flujos en los circuitos  
 $g$  vector N-dimensional de generaciones  
 $d$  vector N-dimensional de demandas

### 8.2.2 Segunda ley de Kirchhoff

A su vez, la segunda ley de Kirchhoff establece que:

$$f(m) = \gamma(m)(\theta(n_F(m)) - \theta(n_T(m))) \text{ para } m = 1, \dots, M \quad (8.6)$$

donde:

$\gamma(m)$  susceptancia del circuito  $m$   
 $\theta(n_F(m))$  ángulo nodal en el nodo DE  $n_F(m)$   
 $\theta(n_T(m))$  ángulo nodal en el nodo PARA  $n_T(m)$

En términos matriciales, las ecuaciones, (8.6) son:

$$f = \gamma S' \theta \quad (8.7)$$

donde:

$\gamma$  matriz diagonal  $M \times M$  que contiene las susceptancias de los circuitos  
 $S'$  matriz  $M \times N$ , matriz transpuesta de la matriz incidencia  $S$   
 $\theta$  vector N-dimensional de ángulos nodales

### 8.2.3 Límites en los flujos en los circuitos

$$-\bar{f} \leq f \leq \bar{f} \quad (8.8)$$

Donde  $\bar{f}$  es el vector de capacidad de los circuitos.

### 8.2.4 Formulación compacta

Todas las restricciones de esta formulación (8.4) – (8.8) son lineales y pueden ser incluidas en el planteamiento del problema. Sin embargo, cabe observar que existen tres tipos de variables de decisión, correspondientes a los vectores  $\theta$  y  $f$  (el vector de generación  $g$  ya está considerado en las ecuaciones básicas). En una red típica el número de generadores sería alrededor de 100, mientras que el número de barras y circuitos puede ser diez veces mayor. Ahora vamos a mostrar que el esfuerzo computacional puede ser reducido rescribiendo el problema únicamente en términos del vector de decisiones  $g$ .

Substituyendo  $f$  como fue definido en (8.7) en (8.5) resulta:

$$B\theta + g = d \quad (8.9)$$

donde  $B = SY'S'$  es una matriz  $N \times N$  conocida como matriz susceptancia.

El sistema de ecuaciones lineales (8.9) puede ser resuelto en términos de  $\theta$  calculando la matriz inversa de  $B$ , i.e.  $\theta = B^{-1}(d - g)$ . Sin embargo, Se puede demostrar que el rango de la matriz  $B$  es  $N - 1$ . Por lo tanto, se necesita eliminar una fila y una columna de  $B$  – por ejemplo las correspondientes al nodo  $s$  – y escribir el sistema de ecuaciones como:

$$\tilde{\theta} = \tilde{B}^{-1}(\tilde{d} - \tilde{g}) \quad (8.10)$$

donde  $\sim$  representa matrices y vectores sin el nodo  $s$ . El ángulo nodal para el nodo  $s$ , conocido como nodo de referencia, se define como  $\theta_s = 0$ . Para simplificar la notación escribimos la ecuación (8.10) en términos de los vectores completos de generación y demanda adicionando una línea y una columna nulas en la posición  $s$  de la matriz  $\tilde{B}^{-1}$ . Denotamos esta matriz resultante  $B^{-1}$  y se describe el sistema (8.10) en términos de los vectores originales:

$$\theta = B^{-1}(d - g) \quad (8.11)$$

Remplazando (8.11) en (8.7), se obtiene:

$$f = \beta(d - g) \quad (8.12)$$

donde  $\beta = \gamma SB^{-1}$  es una matriz  $M \times N$ . Cada elemento  $\beta_{mn}$  representa la sensibilidad del flujo en el circuito  $m$  con respecto a una variación en la generación en el nodo  $n$ . Se observa que los factores de sensibilidad con respecto al nodo de referencia  $s$  son iguales a cero, es decir, una variación en la inyección en este nodo no afecta los flujos. La razón es que el valor de la generación en la barra de referencia se calcula implícitamente a partir del balance generación demanda de los otros nodos:

$$e'g = e'd \quad (8.13)$$

donde  $e$  es un vector unitario de dimensión  $N$ , es decir,  $e' = (1, \dots, 1)$

Las ecuaciones resultantes de la formulación compacta son:

$$e'g = e'd \quad (8.14)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (8.15)$$

$$-\bar{f} \leq \beta(d - g) \leq \bar{f} \quad (8.16)$$

Las restricciones (8.14) y (8.15) ya están consideradas en la formulación pues corresponden al suministro de la demanda y límites para la generación. La nueva restricción que debe ser agregada al modelo es la (8.16). Escribiéndola en términos algebraicos se obtiene:

$$-\bar{f}(m) \leq \sum_{n=1}^N \beta(m, N)(d(n) - g(n)) \leq \bar{f}(m) \quad \text{para } m = 1, \dots, M \quad (8.17)$$



Rescribiendo para considerar la demanda para el lado derecho de la ecuación, agregando las informaciones de la etapa y del escalón de demanda, y relajando la consideración de que existe un generador para cada nodo se obtiene:

$$\sum_{i=1}^I \beta(m, N(i)) g_{tk}(i) - \sum_{j=1}^J \beta(m, N(j)) g_{tk}(j) \geq -\bar{f}_{tk}(m) - \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(n) \quad (8.18a)$$

$$-\sum_{i=1}^I \beta(m, N(i)) g_{tk}(i) - \sum_{j=1}^J \beta(m, N(j)) g_{tk}(j) \leq \bar{f}_{tk}(m) - \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(n) \quad (8.18b)$$

$$\text{para } m = 1, \dots, M, k = 1, \dots, K$$

donde:

$i, j$	índices para centrales hidros y térmicas en los conjuntos $I$ y $J$	
$n(i), n(j)$	nodos asociados a las centrales hidros $i$ y térmicas $j$	
$d_{tk}(n)$	demanda del nodo $n$ en la etapa $t$ , escalón $k$	$MWh \quad D$

### 8.2.5 Representación de los enlaces DC

De secciones anteriores se sabe que los flujos en los circuitos no son variables de decisión independientes porque deben ser formulados en función de los parámetros de la red de transmisión, de la generación y de la demanda.

Sin embargo, los flujos en los enlaces DC son se representan como variables de decisión independientes, dado que el flujo en ellos no está sujeto a la segunda Ley de Kirchhoff. Un flujo de  $\gamma \text{ MW}$  en el enlace DC es representado como una generación *negativa* de  $\gamma \text{ MW}$  en la barra *DE*  $n_F$  y una generación *positiva* de  $(1 - \eta)\gamma \text{ MW}$  en la barra *PARA*  $n_T$ , donde  $\eta$  es el factor de pérdida del enlace DC. Esta representación se incorpora a la ecuación de suministro a la demanda (8.14) y en las restricciones de flujo en los circuitos (8.16). En la ecuación de suministro a la demanda se tiene que:

$$\sum_{i=1}^I g_{tk}(i) + \sum_{j=1}^J g_{tk}(j) + \sum_{l=1}^L [(-\gamma_{tk}(l)) + (1 - \eta_l) \times \gamma_{tk}(l)] = d_{tk} \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (8.19)$$

Resultando:

$$\sum_{i=1}^I g_{tk}(i) + \sum_{j=1}^J g_{tk}(j) - \sum_{l=1}^L \eta_l \times \gamma_{tk}(l) = d_{tk} \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (8.20)$$

Las restricciones que representan el flujo en los circuitos deben ser modificadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\bar{f}_{tk}(m) - \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(i) &\leq -\sum_{i=1}^I \beta(m, N(i)) g_{tk}(i) - \sum_{j=1}^J \beta(m, N(j)) g_{tk}(j) + \\ \sum_{l=1}^L [\beta(m, N_F(l)) \gamma_{tk}(l) - \beta(m, N_T(l)) (1 - \eta_l) \times \gamma_{tk}(l)] &\leq \bar{f}_{tk}(m) - \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(i) \end{aligned} \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (8.21)$$

donde:

$l$	índice de los enlaces DC
$L$	número de enlaces DC
$N_F(l)$	nodo <i>DE</i> del enlace DC $l$
$N_T(l)$	nodo <i>PARA</i> del enlace DC $l$

Además los límites en los flujos del enlace DC se representan a través de las siguientes restricciones:

$$\gamma_{tk}(l) \leq \bar{\gamma}_{tk}(l) \quad \text{for } l = 1, \dots, L; k = 1, \dots, K \quad (8.22)$$

donde:

$\bar{\gamma}_{tk}(l)$	límite del enlace DC en el escalón $k$	MWh	D
------------------------	--	-----	---

#### 8.2.6 Límites de importación y exportación entre áreas eléctricas

Estas restricciones permiten representar límites de importación y exportación entre áreas eléctricas. Dado que la importación o exportación de un área eléctrica está dada por la diferencia entre la generación y la demanda del área, se tiene que:

$$-\bar{I}_{tk}(a) \leq \sum_{i \in I(a)} g_{tk}(i) + \sum_{j \in J(a)} g_{tk}(j) - \sum_{n \in N(a)} d_{tk}(n) \leq \bar{E}_{tk}(a) \quad (8.23)$$

para  $a = 1, \dots, A; k = 1, \dots, K$

donde:

$a$	índice de las áreas		
$A$	número de áreas eléctricas		
$I(a)$	conjunto de centrales hidroeléctricas en el área $a$		
$J(a)$	conjunto de centrales térmicas en el área $a$		
$N(a)$	conjunto de nodos en el área $a$		
$\bar{I}_{tk}(a)$	límite de importación en el área $a$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$\bar{E}_{tk}(a)$	límite de exportación en el área $a$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D

Al rescribir las ecuaciones anteriores para representar la demanda en el lado derecho, se tiene:

$$-\bar{I}_{tk}(a) + \sum_{n \in N(a)} d_{tk}(n) \leq \sum_{i \in I(a)} g_{tk}(i) + \sum_{j \in J(a)} g_{tk}(j) \leq \bar{E}_{tk}(a) + \sum_{n \in N(a)} d_{tk}(n)$$

para  $a = 1, \dots, A; k = 1, \dots, K$  (8.24)

#### 8.2.7 Restricción de suma de flujo en circuitos

Estas restricciones permiten representar límites mínimos y máximos para un conjunto de circuitos seleccionados por el usuario. Utilizando la misma notación de la sección 8.2.4, se tiene que:

$$\underline{F}(sc) \leq \sum_{m \in K(sc)} \alpha(m) \sum_{n=1}^N \beta(m, N) (d(n) - g(n)) \leq \bar{F}(sc)$$

para  $sc = 1, \dots, N_{sc}$  (8.25)

donde:

$sc$	índice de la restricción de suma de flujo en circuito		
$N_{sc}$	número de circuitos pertenecientes a la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$		
$K(sc)$	número de restricciones de suma de flujo en circuitos $sc$		
$\alpha(m)$	factor de participación del circuito $m$ en la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$		
$\underline{F}(sc)$	límite inferior de la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$	MWh	D
$\overline{F}(sc)$	límite superior de la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$	MWh	D

Siguiendo las notaciones de la formulación compacta de flujo en circuitos, siendo  $t$  el índice para la etapa,  $k$  para el escalón de demanda, se tiene el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{tk}(sc) - \sum_{m \in K(sc)} \alpha(m) \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(n) &\leq - \sum_{m \in K(sc)} \sum_{i=1}^I \beta(m, N(i)) g_{tk}(i) - \\ \sum_{m \in K(sc)} \sum_{j=1}^J \beta(m, N(j)) g_{tk}(j) &\leq \overline{F}_{tk}(sc) - \sum_{m \in K(sc)} \alpha(m) \sum_{n=1}^N \beta(m, N) d_{tk}(n) \end{aligned} \quad (8.26)$$

para  $sc = 1, \dots, N_{sc}; k = 1, \dots, K$

### 8.3 Representación de pérdidas

#### 8.3.1 Modelo de pérdidas de transmisión

Las pérdidas de transmisión en cada circuito se representan por demandas adicionales en los nodos terminales del circuito, como se ilustra a continuación.

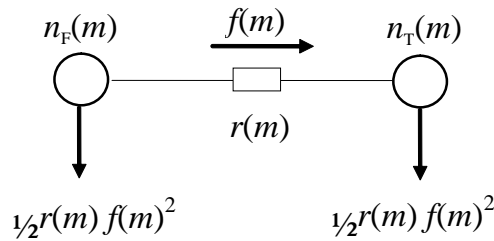


Figura 8.1 – Representación de las pérdidas en un circuito

donde  $r(m)$  es la resistencia del circuito  $m$ . En términos matriciales, la primera ecuación del Kirchhoff se rescribe como:

$$Sf + g = d + \frac{1}{2} R|S| f^2 \quad (8.27)$$

donde:

$R$	matriz diagonal $M \times M$ con las resistencias de los circuitos
$ S $	Valor absoluto de la matriz incidencia $S$ , $N \times M$

### 8.3.2 Modelo de pérdidas

El modelo utilizado para representar la red de transmisión está basado en una formulación compacta, donde los flujos no son representados explícitamente en el problema. En esta formulación se utiliza un esquema de relajación para incluir los circuitos violados mediante restricciones que utilizan las líneas de la matriz  $\beta$ . Los coeficientes de esta matriz representan la sensibilidad de variación de los flujos con relación a variaciones en la inyección de potencia (generación o demanda).

Sin embargo, para la representación de las pérdidas, este modelo no es adecuado y fue adoptada una formulación donde las pérdidas son representadas explícitamente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } c'g & (4) \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & B\theta + g - 1/2|S|p = d \\
 & -\bar{f} \leq \gamma S'\theta \leq \bar{f} \\
 & p_j \geq \hat{p}_j^k + 2r_j\hat{f}_j^k(\gamma_j\Delta\theta_j - \hat{f}_j^k) \quad \forall j = 1, \dots, M; \forall k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

Donde  $B = \gamma S'$ . Este modelo tiene más variables que el modelo compacto, pues representa explícitamente los ángulos nodales y las pérdidas por circuito como variables del problema. Por otro lado, las restricciones tienen una estructura dispersa.

### 8.3.3 Estrategias de solución

Para la solución de este problema se adoptó una estrategia de relajación con criterios adaptativos para la inclusión de linealizaciones de pérdidas. Este método combina una estrategia de ajuste de los criterios para adición de linealizaciones en conjunto con la utilización de pérdidas fijas continuamente actualizadas para aquellos circuitos para los cuales todavía no fueron adicionadas linealizaciones.

La estrategia de ajuste de los criterios permite la adición gradual de las linealizaciones consideradas más importantes resultando en una reducción del número de restricciones adicionadas.. Por otro lado el uso de aproximaciones fijas de las pérdidas en los circuitos que todavía no fueron linealizados permite determinar soluciones más realistas en cada micro iteración. Cabe observar que la calidad de la solución no es afectada ya que las linealizaciones son adicionadas hasta que todos los criterios sean atendidos.

Inicialmente se resuelve el problema sin considerar las restricciones de límite de flujo ni las linealizaciones de pérdidas. La inclusión de las restricciones se hace a medidas en que las violaciones son detectadas.

#### 8.3.3.1 Relajación de los límites de flujo en los circuitos

Después de resolver el problema se calculan los flujos como  $f = \gamma S'\theta$  y se verifica la existencia de circuitos violados. En este caso, estas restricciones son adicionadas al problema que se

resuelve nuevamente. El proceso se repite hasta que todos los circuitos estén operando dentro de su capacidad.

### 8.3.3.2 Relajación de las linealizaciones de las pérdidas

El método de relajación de las linealizaciones de pérdidas posee tres criterios para la adición de las linealizaciones:

- CRIT1: es un criterio, en MW, con base en la pérdida cuadrática absoluta, que fuerza la adición de una linealización para todo circuito cuya pérdida cuadrática es mayor que CRIT1;
- CRIT2: es un criterio, en MW, con base en la diferencia absoluta entre la pérdida cuadrática y la pérdida lineal, que fuerza la adición de una linealización para todo circuito cuya diferencia absoluta es mayor que CRIT2;
- CRIT3: es un criterio, en pu, con base en la diferencia relativa entre la pérdida cuadrática y la pérdida lineal, que fuerza la adición de una linealización para todo circuito cuya diferencia relativa es mayor que CRIT3;

En la primera micro iteración de adición de linealizaciones, solamente se aplica el criterio 1. A partir de la segunda micro iteración, los tres criterios son aplicados simultáneamente.

Originalmente, los tres criterios están fijados en los siguientes valores:

CRIT1	1.0d-2	MW
CRIT2	1.0d-1	MW
CRIT3	2.5d-2	pu

Se observa, sin embargo que en sistemas grandes el número de linealizaciones adicionadas puede ser muy elevado implicando en un aumento en el tiempo de procesamiento.

### 8.3.3.3 Ajuste del criterio de adición de linealizaciones

El método de linealizaciones de pérdidas fue perfeccionado con la siguiente estrategia de ajuste de criterios:

- Inicialmente se resuelve el problema sin considerar las pérdidas. A continuación se calculan las pérdidas en función de los flujos resultante y se fijan estos valores.
- La primera linealización se realiza en el punto de operación obtenido después de fijar las pérdidas aproximadas.
- El criterio 1, inicializado en 3 MW, es ajustado a cada micro iteración de la siguiente manera:  $CRIT1 = \max(0.5 * CRIT1, 1.0d-2)$ .
- En cada micro iteración se adicionan las linealizaciones que violan los criterios, como mencionado en el ítem anterior.
- Para aquellos circuitos cuyas pérdidas no violan los criterios y que por lo tanto no tuvieron ninguna linealización adicionada, se fijan las pérdidas cuadráticas en el problema.

- Caso el criterio establecido en una micro iteración sea insuficiente para adicionar una nueva linealización (la mayor pérdida cuadrática es menor que CRIT1), un nuevo ajuste es realizado ( $CRIT1 = \max(0.5 \cdot CRIT1, 1.0d-2)$ ) hasta que una nueva linealización sea adicionada o hasta que el criterio 1 llegue a su valor mínimo. Este procedimiento garantiza la calidad de la solución para sistemas con pérdidas pequeñas.
- El número máximo de iteraciones para adición de linealizaciones sugerido es 6, pero puede ser alterado por el usuario.

Es importante observar que la calidad de la solución no es afectada dado que todas las linealizaciones son adicionadas hasta que CRIT1 llega a su valor mínimo.

#### 8.3.3.4 *Relajación de las restricciones de integralidad*

En el caso que existan restricciones en el problema que requieren ser modeladas con variables enteras (vertimiento no controlable, térmicas *commitment* y/o costo cóncavo), cada micro iteración implica en la solución de un problema de programación entera con el consiguiente aumento del tiempo de solución.

Para resolver este problema, se adoptó una estrategia de solución donde en las primeras micro iteraciones se relajan las variables enteras y se adicionan las restricciones de circuitos violados y linealizaciones de pérdidas. Después de atendidos los criterios de convergencia, se activa la representación de las variables enteras y se realizan micro iteraciones adicionales.

Esta estrategia se mostró eficiente computacionalmente sin afectar la calidad de la solución.

#### 8.3.3.5 *Tratamiento de casos donde las pérdidas exceden la linealização*

Fue adicionada una estrategia para los casos donde, debido al costo marginal negativo, las **pérdidas en algunos circuitos eran aumentadas artificialmente, “dislocándose” de las aproximaciones lineares**. Cuando un caso de estos es detectado, una penalidad de \$1/MWh es definida para las pérdidas. Esta penalidad puede ser aumentada, iterativamente, hasta que las pérdidas no sean utilizadas para aumentar artificialmente la demanda. Después de obtenida la solución, las pérdidas son fijadas en los valores obtenidos, las penalidades son retiradas y es realizado un *restart* primal, a partir de la base primal factible, para el cálculo correcto de los costos marginales.

## 9 DISPONIBILIDAD Y TRANSPORTE DE GAS NATURAL

Este conjunto de restricciones visa modelar la estructura de producción, consumo y logística de transporte de gas natural, que es el combustible utilizado por algunas plantas termoeléctricas.

El sistema de gas natural se representa por un modelo de flujo en redes a través de un conjunto de nodos – que representan las áreas donde ocurre la producción y consumo del gas, y a los cuales están asociadas las plantas térmicas – y arcos – que representan los gasoductos que interconectan estas áreas.

### 9.1 Producción de gas

#### 9.1.1 Costos de producción

Para la contabilización de los costos de producción de gas existen las siguientes posibilidades:

1. Red de gas con costo de combustible por térmica:

En esta representación se consideran los costos de combustibles de las térmicas y se ignoran los costos de producción de gas. Pequeñas penalidades (10-3) son adicionadas a la producción de gas en el nodo para ayudar en la convergencia del modelo.

2. Red de gas con costo de producción por nodo:

En este caso se consideran los costos de producción de gas, siendo ignorados los costos de combustible y de transporte de las plantas térmicas asociadas. Matemáticamente, los siguientes términos son adicionados a la función objetivo:

$$\text{Min } \sum_{n=1}^{N_g} CP_t(n)P_t(n)$$

donde:

$CP_t(n)$  Costo de producción de gas natural en el nodo  $n$ , en la  $k$ \$/M[UV] D  
etapa  $t$

#### 9.1.2 Límites de producción

Los nodos del sistema de gas natural pueden contar con fuentes de producción locales a los cuales están asociados límites mínimo y máximo diarios. Estas restricciones operacionales son representadas por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\bar{P}_t(n) \leq P_t(n) \leq \underline{P}_t(n) \quad \text{for } n = 1, \dots, N_g \quad (9.1)$$

donde:

$n$  índices de los nodos de producción de gas  
 $N_g$  número de nodos de producción de gas  
 $\bar{P}_t(n)$  máximo límite de producción en un nodo  $n$  en la M[UV]/día D  
etapa  $t$

$\underline{P}_t(n)$	mínimo límite de producción en un nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$P_t(n)$	producción de gas natural en el nodo $n$ , etapa $t$	M[UV]/día	V

## 9.2 Transporte de gas

### 9.2.1 Costos de transporte en los gasoductos

De forma análoga al costo de producción del nodo, el costo de transporte en los gasoductos obedece a la siguiente representación:

#### 1. Red de gas con costo de combustible por térmica:

En esta representación se ignoran los costos de transporte en los gasoductos. Pequeñas penalidades ( $10^{-3}$ ) son adicionadas a las variables de flujo en los gasoductos para facilitar la convergencia del modelo.

#### 2. Red de gas con costo de producción por nodo:

En este caso se consideran los costos de transporte de gas en los gasoductos, ignorando los costos de combustible térmico, adicionando los siguientes términos en la función objetivo:

$$\sum_{n=1}^{N_g} \sum_{m=1}^{\Omega(n)} CT_t(m, n) f_t(m, n)$$

donde:

$CT_t(m, n)$	Costo de transporte en el gasoducto que conecta los nodos $m$ y $n$ en la etapa $t$	k\$/M[UV]	D
--------------	---	-----------	---

### 9.2.2 Límite de flujo en los gasoductos

Los nodos de gas natural son interconectados por gasoductos. Cada gasoducto puede ser caracterizado por sus límites de transporte de flujo mínimo y máximo, originando las siguientes restricciones:

$$\underline{f}_t(n, m) \leq f_t(n, m) \leq \bar{f}_t(n, m) \quad \text{para } (n, m) \in M_g \quad (9.2)$$

donde:

$n, m$	índices de los nodos terminales de los gasoductos		
$M_g$	número de gasoductos de gas natural		
$\bar{f}_t(n, m)$	límite máximo de flujo en el gasoducto que conecta los nodos terminales $n$ y $m$ del sistema de gas en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$\underline{f}_t(n, m)$	límite mínimo de flujo en el gasoducto que conecta los nodos terminales $n$ y $m$ del sistema de gas en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$f_t(n, m)$	flujo de gas natural en el gasoducto que conecta los nodos terminales $n$ y $m$ del sistema de gas en la etapa $t$	M[UV]/día	V



### 9.3 Balance térmico en la simulación de la red de gas

Para cada etapa, la suma de las demanda en cada nodo debe ser igual a la suma de las ofertas – producción local o importación a través de los gasoductos – y el déficit de gas – caso no exista gas natural para el suministro de la demanda no eléctrica de gas. Para cada nodo del sistema de gas, la siguiente restricción de balance se aplica:

$$P_t(n) + \sum_{m \in \Omega(n)} (1 - p_t(m, n)) f_t(m, n) - \sum_{m \in \Omega(n)} f_t(n, m) - \sum_{j \in T(n)} \phi_t(j) g_t(j) + \sum_{k \in D(n)} \delta_t(n, k) = \sum_{k \in D(n)} d_t(n, k) \quad \text{para } n = 1, \dots, N_g \quad (9.3)$$

donde:

$\Omega(n)$	conjunto de nodos del sistema de gas conectados al nodo $n$		
$T(n)$	conjunto de térmicas directamente conectadas al nodo $n$ del sistema de gas		
$D(n)$	conjunto de demanda no eléctricas en el nodo $n$ del sistema de gas		
$P_t(n)$	producción de gas natural en el nodo $n$ , en la etapa $t$	M[UV]/día	V
$p_t(m, n)$	factor de pérdidas del gasoducto que conecta los nodos $m$ y $n$ en la etapa $t$ (dirección $m \rightarrow n$ )	M[UV]/día /MWh	D
$f_t(m, n)$	flujo de gas natural a través del gasoducto que conecta los nodos $m$ y $n$ en la etapa $t$ (dirección $m \rightarrow n$ )	M[UV]/día	V
$\phi_t(j)$	factor de conversión de consumo para la planta térmica $j$ en la etapa $t$	M[UV]/día/MWh	D
$g_t(j)$	generación de la planta térmicas $j$ en la etapa $t$	MWh	V
$\delta_t(n, k)$	déficit de gas natural del nodo $n$ en la etapa $t$ , escalón $k$	M[UV]/día	V
$d_t(n, k)$	demanda de gas natural del nodo $n$ en la etapa $t$ , escalón $k$	M[UV]/día	D

## 10 PLANTAS TÉRMICAS CON COSTO DE EMISIÓN DE CO<sub>2</sub>

El SDDP permite representar los costos de emisión de CO<sub>2</sub>. En este caso la variable de generación térmica tiene una parcela adicional en la función objetivo:

$$\sum_{h=1}^3 c_{co_2}(t) \times \varphi_e(l) \times \varphi_r(j) \times \varphi(j) \times g_{tk}(j, h) \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (10.1)$$

donde:

$l$	índice del combustible asociado a la planta $j$		
$c_{co_2}(t)$	costo de emisión CO <sub>2</sub> en la etapa $t$	\$/tCO <sub>2</sub>	D
$\varphi_e(l)$	factor de emisión del combustible $l$	tCO <sub>2</sub> /UC	D
$\varphi_r(j)$	coeficiente de emisión de la planta térmica $j$	p.u.	D
$\varphi(j)$	factor de consumo de la planta térmica $j$	UC/MWh	D
$g_{tk}(j, h)$	generación de la planta térmica $j$ en el segmento $h$ , en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	V

## 11 CLASIFICACIÓN DE LAS RESTRICCIONES

Las restricciones del SDDP pueden ser clasificadas en restricciones blandas y restricciones duras. Las restricciones de tipo dura (D) son obligatoriamente obedecidas por el programa mientras que para las restricciones de tipo blandas (B) una variable de holgura, penalizada en la función objetivo, asume la inviabilidad de tales restricciones. A seguir son listadas todas las restricciones disponibles en el SDDP, su clasificación y el valor padrón de la penalización en el caso de las restricciones blandas.

Restricción	Tipo	Penalización padrón
Balance hídrico	H	–
Límite almacenamiento	H	–
Turbinamiento mínimo	S	Valor especificado en el campo “Penalización violación desfogue mínimo” en la sección “Parámetros Económicos”
Turbinamiento máximo	H	–
Límites generación térmica	H	–
Suministro demanda	H	–
Volumen alerta	S	$1.1 \times$ costo térmica más cara siendo despachada
Volumen mínimo	S	$1.1 \times$ costo déficit
Volumen espera	H	–
Desfogue total mínimo	S	Valor especificado en el campo “Penalización violación desfogue mínimo” en la sección “Parámetros Económicos”
Desfogue total máximo	S	0
Regularización centrales pasada	H	–
Límite consumo de combustible	H	–
Límite tasa consumo de combustible	H	–
Restricción generación mínima	H	–
Restricción generación	S	$1.1 \times$ costo déficit
Reserva rodante	H	–
Reserva de generación	S	$1.1 \times$ costo déficit
Riego	S	Existen 3 tipos de restricciones: <i>Energía prioritaria</i> : $1.1 \times$ costo déficit <i>Riego prioritario</i> : $1.1 \times$ costo térmica más cara siendo despachada Valor fijo: 0
Suma de intercambios	H	–
Límite de flujo en los circuitos	H	–
Representación enlace DC	H	–
Límites exportación/importación áreas	H	–
Suma de flujo en los circuitos	H	–

## 12 DICCIONARIO DE VARIABLES

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$k$	índice de los escalones de demanda de una etapa		
$K$	numero de escalones de demanda		
$h(k)$	duración del escalón de demanda $k$	horas	D
$d_{tk}$	demanda de energía de la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$c_\delta$	representación genérica para el costo de violaciones operativas	\$/ unidad violación	D
$\delta g_t$	violación de la demanda (déficit) en la etapa $t$	unidad violación	V
$i$	índice de centrales hidroeléctricas		
$I$	número de centrales hidroeléctricas		
$I_U(i)$	conjunto de centrales aguas arriba que turbinan para $i$		
$I_S(i)$	conjunto de centrales aguas arriba que vierten para $i$		
$I_F(i)$	conjunto de centrales aguas arriba que filtran para $i$		
$v_{t+1}(i)$	volumen de la central $i$ al final de la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$v_t(i)$	volumen de la central $i$ al inicio de la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$a_t(i)$	volumen caudal afluente a la central $i$ durante la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\varepsilon(v_t(i))$	volumen evaporado por la central $i$ durante la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$u_{tk}(i)$	volumen caudal turbinado por la planta $i$ durante la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	V
$s_{tk}(i)$	volumen vertido por la central $i$ durante la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	V
$\phi_{tk}(i)$	volumen filtrado en la central $i$ , durante la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	V
$x_t(i)$	variable 0-1 que implementa la característica de vertimiento no controlable para la central $i$	0-1	V
$\bar{v}_t(i)$	volumen mínimo almacenado de la central $i$ al final de la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\underline{v}_t(i)$	volumen mínimo almacenado en la central $i$ al final de la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\bar{u}_{tk}(i)$	volumen turbinado máximo para la central $i$ en la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	D
$\underline{u}_{tk}(i)$	volumen turbinado mínimo para la central $i$ en la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	D
$\delta u_{tk}(i)$	violación del volumen mínimo para la central $i$ en la etapa $t$ , escalón $k$	hm <sup>3</sup>	V

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$\rho(v_t(i))$	coeficiente de producción de la central $i$ en la etapa $t$ calculado en función del nivel del embalse al inicio de la etapa	MWh/hm <sup>3</sup>	D
$\bar{\rho}(i)$	coeficiente de producción promedio de la central $i$	MWh/hm <sup>3</sup>	D
$\underline{v}_{at}(i)$	volumen de alerta de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\delta_{at}(i)$	violación del volumen de alerta de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$\underline{v}_{mt}(i)$	volumen mínimo operativo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\delta_{mt}(i)$	violación del volumen mínimo operativo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$\underline{v}_{et}(i)$	volumen de controle de crecidas de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\underline{\Delta}_t(i)$	desfogue total máximo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\bar{\Delta}_t(i)$	desfogue total mínimo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	D
$\delta_{1t}(i)$	violación de la restricción de desfogue total mínimo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$\delta_{2t}(i)$	violación de la restricción de desfogue total máximo de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$\phi(i)$	factor de regulación para la central $i$	p.u.	D
$r_t(i)$	volumen de riego de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$\delta r_t(i)$	violación del riego de la central $i$ en la etapa $t$	hm <sup>3</sup>	V
$r_{tk}(i)$	reserva rodante de la central $i$ , etapa $t$ , escalón $k$	MW	D
$p$	índices para los segmentos de la función de costo futuro (lineal por partes)		
$P$	número de segmentos de la función de costo futuro (lineal por partes)		
$\alpha$	variable escalar que representa el valor esperado del costo futuro	k\$	V
$w_t(p)$	termo constante del $p$ -ésimo segmento de la función de costo futuro (lineal por partes)	k\$	D
$\lambda_{tv}(i, p)$	coeficiente para la central $i$ del $p$ -ésimo segmento de la función de costo futuro (lineal por partes)	k\$/hm <sup>3</sup>	D
$\lambda_{ta}(i, p)$	coeficiente para el volumen afluente a la central $i$ del $p$ -ésimo segmento de la función de costo futuro (lineal por partes)	k\$/hm <sup>3</sup>	D
$N_r$	número de embalses en el sistema		
$J(i)$	conjunto de plantas hidroeléctricas ubicadas aguas debajo de la central $i$		

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$f_{vutil}(i)$	factor de participación del volumen de la central $i$ en el sistema	p.u.	D
$\delta_t$	violación de la curva de aversión a riesgo en la etapa $t$	MWh	V
$f_{ea}$	factor de la curva de aversión a riesgo	p.u.	D
$j$	índice de las plantas térmicas		
$J$	número de plantas térmicas		
$\mathcal{C}$	conjunto de plantas térmicas con representación de unit commitment		D
$c(j)$	costo operativo de la planta térmica $j$	\$/MWh	D
$c_a(j)$	costo de arranque de la planta térmica $j$	k\$	D
$x_{tk}(j)$	decisión de commitment de la planta térmica $j$ en la etapa $t$ , escalón $k$	p.u.	V
$g_{tk}(j)$	generación de la planta $j$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	V
$\underline{g}_{tk}(j)$	generación mínima generación de la planta $j$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$\bar{g}_{tk}(j)$	generación máxima generación de la planta $j$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$c(j, h)$	costo unitario de producción de la planta $j$ en el segmento $h$	\$/MWh	D
$g_{tk}(j, h)$	generación de planta térmica $j$ en el segmento $h$	MWh	V
$\sigma(j, h)$	factor de participación del segmento $h$ respecto a la capacidad de la planta térmica $j$	p.u.	D
$l$	índice de los combustibles		
$F$	número de combustibles		
$\Phi(l)$	conjunto de plantas que utilizan el combustible $l$		
$\Phi_t(l)$	disponibilidad del combustible $l$ en la etapa $t$	UC	D
$\varphi(j)$	factor de consumo de la planta $j$	UC / MWh	D
$\tau_t(l)$	tasa de consumo máxima del combustible $l$ en la etapa $t$	UC/hora	D
$c_{co_2}(t)$	costo de emisión de CO2 en la etapa $t$	\$/tCO <sub>2</sub>	D
$\varphi_e(l)$	factor de emisión del combustible $l$	tCO <sub>2</sub> /UC	D
$\varphi_r(j)$	coeficiente de emisión de la planta $j$	p.u.	D
$\varphi(j)$	factor de consumo del combustible de la planta $j$	UC/MWh	D
$r$	índice de las restricciones de generación		
$R$	número de restricciones de generación		
$J(r)$	conjunto de plantas térmicas en la restricción $r$		
$I(r)$	conjunto de plantas hidroeléctricas en la restricción $r$		

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$\underline{G}_{tk}(r)$	límite inferior de la restricción $r$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$\overline{G}_{tk}(r)$	límite superior de la restricción $r$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$r$	índice de las restricciones de reserva de generación		
$R_1$	número de restricciones de reserva de generación tipo 1		
$R_2$	número de restricciones de reserva de generación tipo 2		
$R_3$	número de restricciones de reserva de generación tipo 3		
$f(r)$	factor de la demanda correspondiente a la restricción de reserva $r$	p.u.	D
$s$	índices de los sistemas o regiones		
$S$	número de sistemas		
$I(s)$	conjunto de plantas hidroeléctricas en el sistema $s$		
$J(s)$	conjunto de plantas térmicas en el sistema $s$		
$\Omega(s)$	conjunto de sistemas directamente conectados al sistema $s$		
$d_{tk}(s)$	demanda de energía en el sistema $s$ en la etapa $t$ , en el escalón $k$	MWh	D
$\omega_{tk}(l, s)$	transferencia de energía del sistema $l$ al sistema $s$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	V
$\overline{\omega}(l, s)$	límite de transferencia desde el sistema $l$ al sistema $s$	MWh	D
$c(l, s)$	costo de transferencia del sistema $l$ al sistema $s$	\$/MWh	D
$c(s, l)$	costo de transferencia del sistema $s$ al sistema $s$	\$/MWh	D
$si$	índices de las restricciones de suma de intercambio		
$N_{si}$	número de restricciones de suma de intercambio		
$K(si)$	número de líneas de intercambio pertenecientes a la restricción de suma de intercambio $si$		
$I_{tk}(m, si)$	línea de intercambio $m$ de la restricción $si$ , en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	V
$\underline{I}_{tk}(m, si)$	límite inferior de la restricción de suma de intercambio $si$ , en el escalón $k$ y en la etapa $t$	MWh	D
$\overline{I}_{tk}(m, si)$	límite superior de la restricción de suma de intercambio $si$ , en el escalón $k$ y en la etapa $t$	MWh	D
$n$	índices de barras		
$N$	número de barras		

Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$g(n)$	generación en la barra $n$	MWh	V
$d(n)$	demanda en la barra $n$	MWh	D
$m$	índices de circuitos		
$M$	número de circuitos		
$f(m)$	flujo de potencia en el circuito $m$	MWh	V
$\Omega(n)$	conjunto de circuitos directamente conectados a la barra $n$		
$\gamma(m)$	susceptancia del circuito $m$		
$\theta(n)$	ángulo nodal de la barra $n$		
$n(i)$	conjunto de barras asociadas a la planta $i$		
$n_F(m)$	barra DE del circuito $m$		
$n_T(m)$	barra PARA del circuito $m$		
$l$	índices de enlace DC		
$L$	número de enlaces DC		
$\bar{\gamma}_{tk}(l)$	límite de flujo del enlace DC $l$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$a$	índices de áreas eléctricas		
$A$	número de áreas		
$I(a)$	conjunto de plantas hidroeléctricas pertenecientes al área $a$		
$J(a)$	conjunto de plantas térmicas pertenecientes al área $a$		
$N(a)$	conjunto de barras pertenecientes al área $a$		
$\bar{I}_{tk}(a)$	límites de importación del área $a$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$\bar{E}_{tk}(a)$	límites de exportación del área $a$ en la etapa $t$ , escalón $k$	MWh	D
$sc$	índices de las restricciones de suma de flujo en los circuitos		
$N_{sc}$	número de restricciones de suma de flujo en los circuitos		
$K(sc)$	número de circuitos pertenecientes a la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$		
$\alpha(m)$	factor multiplicativo asociado al circuito $m$ de la restricción $sc$		
$\underline{F}(sc)$	límite inferior de la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$	MWh	D
$\bar{F}(sc)$	límite superior de la restricción de suma de flujo en circuitos $sc$	MWh	D
$n$	índices de los nodos de producción de gas natural		
$N_g$	número de nodos de producción de gas natural		



Nombre	Descripción	Unidad	Tipo
$\Omega(n)$	conjunto de nodos del sistema de gas conectados al nodo $n$		
$T(n)$	conjunto de plantas térmicas asociadas al nodo $n$ del sistema de gas		
$D(n)$	conjunto de demandas no eléctricas conectadas al nodo $n$ del sistema de gas		
$\bar{P}_t(n)$	límite máximo de producción de gas del nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$\underline{P}_t(n)$	límite mínimo de producción de gas del nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$P_t(n)$	producción de gas natural en el nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	V
$n, m$	índices de los nodos terminales de los gasoductos		
$M_g$	número de gasoductos		
$\bar{f}_t(n, m)$	límite máximo de flujo de gas del gasoducto que conecta los nodos $n$ y $m$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$\underline{f}_t(n, m)$	límite mínimo de flujo de gas del gasoducto que conecta los nodos $n$ y $m$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D
$f_t(n, m)$	flujo de gas natural del gasoducto que conecta los nodos $n$ y $m$ en la etapa $t$	M[UV]/día	V
$p_t(m, n)$	factor de pérdidas del gasoducto que conecta los nodos $m$ y $n$ en la etapa $t$ (cuando el flujo está en la dirección $m \rightarrow n$ )	M[UV]/día/MWh	D
$\phi_t(j)$	factor de conversión de consumo de gas para la planta térmica $j$ en la etapa $t$	M[UV]/día/MWh	D
$\delta_t(n, k)$	déficit de la demanda de gas natural $k$ en el nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	V
$d_t(n, k)$	demanda de gas natural $k$ en el nodo $n$ en la etapa $t$	M[UV]/día	D

### 13 BIBLIOGRAFÍA

Pereira, M.V., Pinto, L.M.V.G., “Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning”, *Mathematical Programming*, Volume 52, Numbers 1-3, pp. 359-375, May, 1991

Pereira, M.V., McCoy M.F., Merrill, H.M., “Managing risk in the new power business”, *IEEE Computer Applications in Power*, pp.18-24, Apr, 2000.

Gorenstin, B.G., Campodonico, N.M., Costa, J.P., Pereira, M.V.F., “Stochastic optimization of a hydro-thermal system including network constraints”, *Power Industry Computer Application Conference, 1991. Conference Proceedings*, pp. 127-133, May, 1991.

Pereira, M. V., Campodonico, N.M., Kelman, R., “Planning Risks. In: Risk Tutorial”, *IEEE Pica Conference*, Santa Clara, 1999.

Pereira, M. V., Campodonico, N.M., Kelman, R., “Long-term Hydro Scheduling based on Stochastic Models”, *EPSOM'98*, Zurique, Suíça, 1998.

Pereira, M. V., Campodonico, N.M., Kelman, R., “Programación Dinámica Dual Estocástica (MPODE y SUPER/OLADE)”, *Seminario Internacional Modelos de Planeación y Mercados para el Sistema Eléctrico Colombiano*, 1998, Bogotá, Colombia, 1998

Pereira, M. V., Campodonico, N.M., Gorenstin, B.G., Costa, J. P., “Application of Stochastic Optimization in Power System Planning and Operation”. *International Symposium on Electric Power Engineering*, Estocolmo, Suécia, 1995.

## A. PROGRAMACIÓN DINÁMICA DUAL ESTOCÁSTICA

### A.1 Formulación del problema

El despacho hidrotérmico multi-etapa se plantea como un problema de *programación dinámica estocástica*, caracterizado por la siguiente ecuación recursiva:

$$\alpha(v_{t-1}, a_{t-1}) = E\{ \text{Min} [z_t(e_t) + \alpha_{t+1}(v_t, a_t)] \} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{s.t.} \quad v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}(i) + a_t(i)$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i)$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i)$$

$$e_t(i) = \rho(i)u_t(i)$$

$$i = 1, \dots, I$$

donde  $i$  índice de las centrales hidroeléctricas ( $I$  = número de centrales) y  $z_t(e_t)$  representa el costo operativo asociado a la generación hidroeléctrica  $e_t$ , esto es:

$$z_t(e_t) = \text{Min} \sum_{j=1}^J c(j)g_t(j) + c_\delta \delta_t \quad (\text{A.2})$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^J g_t(j) + \sum_{i=1}^I e_t(i) + \delta_t = d_t$$

$$0 \leq g_t(j) \leq \bar{g}_t(j) \quad j = 1, \dots, J$$

donde  $j$  índice de las térmicas ( $J$  = número de térmicas).

En teoría, el procedimiento recursivo (A.1) podría ser resuelto a través de un algoritmo de programación dinámica estocástica (PDE). Sin embargo, el esfuerzo computacional del algoritmo PDE tradicional crece exponencialmente con el número de variables de estado del problema.

Debido a esto, se utiliza la técnica de programación dinámica estocástica dual (SDDP), que permite obtener los mismos resultados de la PDE tradicional, sin la necesidad de discretización del espacio de estados. El algoritmo SDDP es un proceso iterativo de construcción de una aproximación de la función de costo futuro, cuya precisión depende de dos parámetros: el tamaño de la muestra de estados ( $L$ ) y el número de escenarios condicionados utilizados en el cálculo de la función de costo futuro ( $N$ ).

### A.2 Pasos del algoritmo SDDP

#### A.2.1 Selección del conjunto inicial de estados

En la primera iteración se requieren  $L$  estados iniciales. Para cada etapa  $t$  el estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  representa las condiciones iniciales de almacenamiento y afluencias, para  $l = 1, \dots, L$ .

### A.2.1.1 Estados iniciales de almacenamiento

El estado inicial de almacenamiento para la etapa  $t = 1$  es un dato conocido, igual a  $v_n$  para cada uno de los  $L$  estados. Los estados iniciales de almacenamiento  $\{v_{t-1}^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  y  $t = 2, \dots, T$  se obtienen dividiendo la capacidad del embalse en  $L$  valores. Por ejemplo, si  $L = 5$ , los estados de almacenamiento serían 100%, 75%, 50%, 25% y 0%.

### A.2.1.2 Estados iniciales de afluencias

La condición hidrológica inicial  $a_0$  es un dato conocido. Los estados iniciales de afluencias anteriores  $\{a_{t-1}^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  se obtienen generando un conjunto de  $L$  secuencias hidrológicas para las etapas  $t = 2, \dots, T$ . El proceso de generación consiste en sortear aleatoriamente un vector de ruidos  $\xi_t^l$  con distribución Lognormal de tres parámetros y calcular el vector de afluencias para la etapa  $t$ , secuencia  $l$  como:

$$a_t^l = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^l \quad (\text{A.3})$$

Las matrices  $\Phi_{t-1}$  and  $\Lambda_t$  contienen los parámetros del modelo estocástico de afluencias.  $\Phi_{t-1}$  representa la relación entre las afluencias de una misma central en etapas consecutivas (correlación temporal), mientras  $\Lambda_t$  representa la relación entre todas las afluencias del sistema en la misma etapa (correlación espacial). En esta presentación de la metodología se utiliza un modelo auto-regresivo de orden 1, con el objetivo de simplificar la notación. Se observa que la utilización de modelos de orden mayor que 1 no compromete la eficiencia de la metodología SDDP.

## A.2.2 Cálculo de la función aproximada de costo futuro

La aproximación de la función de costo futuro se construye a través de una recursión en el sentido inverso del tiempo. Para cada etapa  $t$  y para cada estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  el siguiente proceso se repite.

### A.2.2.1 Generación de $N$ escenarios de afluencias condicionadas

Se generan  $N$  escenarios de afluencias condicionadas a la afluencia  $a_{t-1}^l$ , como se muestra a continuación:

$$a_t^{ln} = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (\text{A.4})$$

donde  $\Phi_{t-1}$  y  $\Lambda_t$  son los parámetros del modelo estocástico de afluencias para la etapa  $t$ , y el vector  $\xi_t^n$  se obtiene por un sorteo aleatorio de una distribución Lognormal.

### A.2.2.2 Solución del problema operativo

Sea  $v_{t-1}^l$  el vector de almacenamientos iniciales y  $a_t^{ln}$  uno de los vectores de afluencias condicionadas producido en el paso A.2.2.1. Se resuelve entonces el problema operativo para la etapa  $t$ .

$$\begin{aligned}
w_t^{ln} &= \text{Min } z_t(e_t) + \alpha_{t+1} & (A.5) \\
\text{s.t.} \quad & v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + a_t^{ln}(i) & \pi_{v_{t-1}}^{ln}(i) \\
& 0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) & \pi_{\bar{v}_t}^{ln}(i) \\
& 0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) & \pi_{\bar{u}_t}^{ln}(i) \\
& e_t(i) = \rho(i)u_t(i) \\
& \alpha_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{a_t}^p(i) \times a_t^{ln}(i) + r_t^p & \pi_{\alpha_{t+1}}^{ln}(p) \\
& \alpha_{t+1} \geq 0 \\
& \text{para } i = 1, \dots, I; \text{ para } j = 1, \dots, J; \text{ para } p = 1, \dots, P(t)
\end{aligned}$$

donde  $P(t)$  es el número de aproximaciones de la función de costo futuro en la etapa  $t$ . Inicialmente  $P(t) = 0$ .

### A.2.2.3 Cálculo de las derivadas

Después de la solución del problema (A.5) para cada uno de los escenarios de afluencias condicionadas, se calculan las derivadas de la función objetivo con respecto a las condiciones iniciales  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$ .

El vector  $\partial w_t^{ln} / \partial v_{t-1}^l$  representa la variación del costo operativo con respecto a los almacenamientos iniciales. Como estos almacenamientos sólo aparecen en la ecuación de balance hídrico, se tiene:

$$\partial w_t^{ln} / \partial v_{t-1}^l = \pi_{v_{t-1}}^{ln} \quad (A.6)$$

donde  $\pi_{v_{t-1}}^{ln}$  es el multiplicador Simplex asociado a la ecuación de balance hídrico del problema (A.5).

La variación del costo operativo con respecto a las afluencias anteriores,  $\partial w_t^{ln} / \partial a_{t-1}^l$ , se obtiene de la siguiente manera. Aunque  $a_{t-1}^l$  no aparezca en el lado derecho del problema (A.5), se utiliza la regla de la cadena para obtener la derivada:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_{t-1}^l} = \frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_t^{ln}} \times \frac{\partial a_t^{ln}}{\partial a_{t-1}^l} \quad (A.7)$$

Dado que  $a_t^{ln}$  aparece en la ecuación de balance hídrico y en las restricciones de costo futuro, se tiene:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_t^{ln}} = \pi_{v_{t-1}}^{ln}(i) + \sum_{p=1}^P \phi_{a_t}^p \times \pi_{\alpha_{t+1}}^{ln}(p) \quad (A.8)$$

Para obtener el término  $\partial a_t^{ln} / \partial a_{t-1}^l$  se substituye  $a_t^{ln}$  por la expresión (A.4) del modelo estocástico de afluencias. Derivando, se tiene:

$$\partial a_t^{ln} / \partial a_{t-1}^l = \Phi_{t-1} \quad (\text{A.9})$$

La derivada deseada se calcula como el producto de las dos expresiones anteriores, es decir:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_{t-1}^l} = [\pi_{v_{t-1}}^{ln}(i) + \sum_{p=1}^p \phi_{a_t}^p \times \pi_{a_{t+1}}^{ln}(p)] \times \Phi_{t-1} \quad (\text{A.10})$$

Por simplicidad de notación, se define:

$$\phi_{a_{t-1}}^{ln} = \frac{\partial w_t^{ln}}{\partial a_{t-1}^l} \quad (\text{A.11})$$

#### A.2.2.4 Cálculo de la aproximación de la función de costo futuro

Después de la solución de los  $N$  problemas correspondientes a los  $N$  escenarios condicionados al estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  y calculadas las derivadas con respecto a las condiciones iniciales para cada escenario  $n$ , el valor esperado de estas derivadas está dado por:

$$\phi_{v_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{v_{t-1}}^{ln} \quad (\text{A.12})$$

$$\phi_{a_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_{a_{t-1}}^{ln} \quad (\text{A.13})$$

y el valor esperado de la función objetivo es:

$$w_t^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_t^{ln} \quad (\text{A.14})$$

Una aproximación de la función de costo futuro de la etapa anterior  $t - 1$  se obtiene a través de la linealización del valor esperado  $w_t^l$  alrededor del estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$ :

$$\alpha_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq w_t^l + \phi_{v_{t-1}}^l \times (v_{t-1} - v_{t-1}^l) + \phi_{a_{t-1}}^l \times (a_{t-1} - a_{t-1}^l) \quad (\text{A.15})$$

Separando los valores conocidos de las variables de decisión y agregando los términos, se tiene:

$$\alpha_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1} + \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1} + r_{t-1}^l \quad (\text{A.16})$$

donde  $r_{t-1}^l$  es un término constante dado por:

$$r_{t-1}^l = w_t^l - \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1}^l - \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1}^l \quad (\text{A.17})$$

### A.2.2.5 Actualización de la función de costo futuro de la etapa anterior

El procedimiento presentado en A.2.2.4 produce un hiperplano que aproxima la función de costo futuro de la etapa anterior  $t - 1$  alrededor del estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$ . Este proceso se repite para cada estado  $l$ , con  $l = 1, \dots, L$ . De esta forma generamos  $L$  aproximaciones de la función de costo futuro para la etapa  $t - 1$ . Estos  $L$  nuevos hiperplanos son añadidos al problema de la etapa anterior, por lo tanto  $P(t - 1) \leftarrow P(t - 1) + L$ .

### A.2.3 Cálculo del límite inferior

El problema operativo se resuelve ahora para la primera etapa  $t = 1$ . Los tramos de la función de costo futuro para esta etapa fueron obtenidos como se mostró en la sección A.2.2. El valor esperado del costo operativo a lo largo del período de planeamiento se calcula como:

$$\underline{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_1^l \quad (\text{A.18})$$

donde:

$\underline{w}$  valor esperado del costo operativo

$w_1^l$  valor óptimo del problema operativo de la primera etapa dado el volumen inicial  $v_0$  y el vector de afluencias  $a_1^l$ :

$$w_1^l = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_1(j)g_1(j) + c_\delta \delta_t + \alpha_1 \quad (\text{A.19})$$

sujeto a las restricciones operativas etc.

Si el procedimiento presentado en las secciones A.2.1 y A.2.2 se aplicara a todos los estados  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$ , posibles del sistema, el costo operativo promedio calculado en (A.18) sería por definición la solución óptima del problema estocástico. Como el número total de estados es excesivamente elevado, se aplica el procedimiento a un subconjunto de  $L$  estados. Por lo tanto, las funciones de costo futuro  $\{\alpha_1\}$  calculadas son aproximaciones de las funciones verdaderas. En particular, dado que la aproximación de la función de costo futuro no incluye todos los tramos, el valor  $\underline{w}$  en (A.18) es un límite inferior para la solución óptima.

### A.2.4 Cálculo del límite superior

El cálculo del límite superior se basa en la observación de que el costo esperado resultante de la simulación operativa del sistema para cualquier función de costo futuro no puede ser inferior al valor óptimo. El proceso consiste en una simulación en el sentido directo del tiempo para una muestra de tamaño  $L$ . El procedimiento de simulación se presenta a continuación.

#### A.2.4.1 Estados iniciales de almacenamiento

Para la etapa  $t = 1$  se considera el vector de volúmenes iniciales  $v_0$ .

#### A.2.4.2 Estados iniciales de afluencias

Los estados iniciales de afluencias para las etapas  $t = 1, \dots, T$  y para los escenarios  $l = 1, \dots, L$  son los mismos que se sortearan en la sección A.2.1.2.

#### A.2.4.3 Simulación operativa

Para cada etapa  $t$  y para cada estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  se resuelve el problema operativo:

$$w_t^l = \text{Min } z_t(e_t) + \alpha_{t+1} \quad (\text{A.20})$$

$$\text{s. a: } v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + \alpha_t^l(i)$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i)$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i)$$

$$e_t(i) = \rho(i)u_t(i)$$

$$\alpha_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{a_t}^p(i) \times a_t(i) + r_t^p$$

$$\alpha_{t+1} \geq 0$$

$$\text{para } i = 1, \dots, I; \text{ para } j = 1, \dots, J; \text{ para } p = 1, \dots, P(t)$$

donde  $P(t)$  es el número de aproximaciones de la función de costo futuro en la etapa  $t$  obtenidas en el proceso recursivo presentado en A.2.2. El siguiente valor está asociado a la solución de este problema:

$$z_t^l = w_t^l - \alpha_t^l \quad (\text{A.21})$$

donde  $w_t^l$  es el valor óptimo de la solución y  $w_t^l$  es el valor de la variable de costo futuro en la solución óptima. En otras palabras,  $z_t^l$  representa el costo operativo en la etapa  $t$ , sin costo futuro.

#### A.2.4.4 Actualización del estado inicial de almacenamiento

Para las etapas  $t$ ,  $t = 2, \dots, T$ , actualice los estados iniciales de almacenamiento utilizando el vector de almacenamientos finales  $v_{t-1}^l$  obtenido en la solución del problema operativo de la etapa  $t - 1$  para el  $l$ -ésimo escenario.

#### A.2.4.5 Obtención del límite superior

Después de la solución del problema (A.20) para cada estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  y para cada etapa se calcula:

$$\bar{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L z^l \quad (\text{A.22})$$

donde  $z^l$  es el costo operativo total de la secuencia  $l$ :



$$z^l = \sum_{t=1}^T z_t^l \quad (\text{A.23})$$

### A.2.5 Verificación de la optimalidad

El límite superior estimado en (A.22) se basa en una muestra de  $L$  secuencias de afluencias. Por lo tanto, hay una incertidumbre alrededor de esta estimación, que depende de la desviación estándar del estimador:

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L (z^l - \bar{w})^2} \quad (\text{A.24})$$

El intervalo de confianza (95%) para  $\bar{w}$  es:

$$[\bar{w} - 1.96\sigma_w; \bar{w} + 1.96\sigma_w] \quad (\text{A.25})$$

Si el límite inferior  $\underline{w}$  está en el intervalo (A.25), se llegó a la solución óptima y el algoritmo termina. En caso contrario, se debe mejorar la aproximación de las funciones de costo futuro y por lo tanto repetir el procedimiento presentado en la sección A.2.2. Los nuevos estados de almacenamiento son los volúmenes ( $v_{t-1}^l$ ) producidos en la simulación operativa presentada en la sección A.2.4. Los estados de afluencias ( $a_{t-1}^l$ ) siguen iguales.

## B. MODELO ESTOCÁSTICO DE CAUDALES

### B.1 Objetivo

En este Anexo se describe el modelo estocástico de caudales utilizados en el modelo SDDP. El modelo busca caracterizar, de la forma más realista y simple posible:

- la dependencia de una secuencia de caudales afluentes a un embalse con el ciclo anual y con su propio histórico reciente;
- la naturaleza de la distribución del vector de ruidos en cada intervalo de tiempo;
- la naturaleza de la interdependencia entre las afluencias a los diferentes embalses.

El modelo de caudales es capaz de determinar y aplicar diferentes órdenes de autocorrelación para cada período del modelo. En este texto, se procura simplificar la representación matemática del modelo, considerando el tipo AR(1). Esperamos que esto haga más fácil la comprensión del modelo. El modelo de caudales afluentes a un embalse se describe en la Sección B.2, incluyendo procedimientos para la estimación de los parámetros del modelo autoregresivo, caracterización de la distribución de ruidos, y testes para verificar si el modelo es adecuado.

La sección B.3 describe como se modela y estima la relación entre los caudales afluentes a diferentes embalses.

El modelo genera series sintéticas de caudales que son utilizadas en la fase *forward* del algoritmo del SDDP, o en la simulación de la operación del sistema. El modelo de caudales también genera secuencias de caudales condicionadas, utilizadas en la fase *backward* del algoritmo. La Sección B.4 describe como el programa SDDP genera secuencias sintéticas de caudales para el modelo y estima los parámetros.

### B.2 Modelación en una variable para secuencias de caudales afluentes a un único embalse

#### B.2.1 El Modelo ARP(1)

##### B.2.1.1 Introducción

Los parámetros que caracterizan las secuencias de caudales (media, desviación estándar, asimetría y correlación temporal) generalmente presentan un comportamiento periódico a lo largo del año. Estas secuencias se pueden analizar por modelos autoregresivos periódicos, ARP. En este texto se asume un modelo autoregresivo de orden 1 para cada período, es decir, toda la información de correlación entre caudales presente y pasada está contenida en la correlación con el período anterior. En este modelo, la autocorrelación se reduce exponencialmente en la medida que el número de períodos autoregresivos lineales aumenta.

Usaremos la siguiente notación para describir el modelo:

$m$  para períodos,  $m = 1, 2, \dots, s$  donde  $s$  es el número de etapas del año ( $s = 12$  para series mensuales,  $s = 52$  para series semanales)

- $T$  para años,  $T = 1, 2, \dots, N$  donde  $N$  es el número de años
- $t$  índice de las etapas,  $t = 1, 2, \dots, s \times N$ ,
- $Z_t$  secuencia estacional de la etapa  $t$
- $\mu_m$  media estacional del período  $m$
- $\sigma_m$  desviación estándar del período  $m$
- $\phi_m$  parámetro autoregresivo (de orden  $l$ ) para el período  $m$
- $a_t$  ruidos con media cero y varianza  $\theta^2(t)$

Una autocorrelación de orden 1 en cada período significa que en cada período los caudales están relacionados a los caudales del período anterior por la ecuación:

$$\left(\frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m}\right) = \phi_m \left(\frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}}\right) + a_t$$

$$\left(\frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m}\right) = \phi_m \left(\frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}}\right) + a_t \quad (\text{B.1})$$

donde  $a_t$  no depende de  $Z_{t-1}, Z_{t-2}$  etc.

#### B.2.1.2 Relación entre el parámetro autoregresivo y la correlación de caudales

La siguiente ecuación muestra que con un modelo autoregresivo de primer orden, el parámetro autoregresivo de cada período es el mismo que el coeficiente de correlación (de primer orden) del período correspondiente.

Denominaremos  $\rho^m(k)$ , la correlación entre  $Z_t$  y  $Z_{t-k}$  para  $t$  perteneciente al período  $m$ :

$$\rho^m(k) = E \left[ \left( \frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m} \right) \left( \frac{Z_{t-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

El conjunto de funciones de autocorrelación  $\rho^m(k)$  de los períodos  $m = 1, \dots, s$  describen la estructura con dependencia temporal de las series de caudales. Substituyendo la ecuación (B.2) en (B.1), se obtiene:

$$\rho^m(k) = E \left[ \left( \frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m} \right) \left( \frac{Z_{t-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] + E \left[ a_t \left( \frac{Z_{t-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \quad (\text{B.3})$$

En función de la independencia de los ruidos con respecto al histórico, el segundo término del lado derecho de la ecuación es cero. Así:

$$\rho^m(k) = \phi_m \rho^{m-1}(k-1) \quad \text{para } k \geq 1$$

$$\rho^m(k) = \phi_m \phi_{m-1} \rho^{m-2}(k-1) \quad \text{para } k \geq 2$$

(B.4)

Si aplicamos la misma relación continuamente y observamos que  $\rho^m(k-k) = \rho^m(0) = 1$ , obtenemos:

$$\rho^m(k) = \phi_m \phi_{m-1} \dots \phi_{m-k+1} \quad (\text{B.5})$$

En el caso particular en que  $k = 1$ , tenemos la siguiente relación:

$$\rho^m(1) = \phi_m \quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto, en un modelo ARP(1), el parámetro autoregresivo  $\phi_m$  es idéntico a la correlación entre los caudales del período  $m$  y el período  $m-1$ . Por eso podemos expresar la varianza del ruido en términos de los parámetros autoregresivos.

### B.2.1.3 El vector de ruidos transformados

La generación de secuencias de caudales que serán usadas por el modelo SDDP requiere el conocimiento de los parámetros y de la forma de la distribución asociada a los caudales. En particular, es necesario determinar los parámetros de la distribución de ruidos de los caudales. Estos parámetros no están directamente relacionados a los caudales anteriores por medio de las autocorrelaciones.

Si asumimos que el ruido tiene una distribución Lognormal, con media 0, varianza  $\theta^2(t)$  y un límite inferior  $\psi_t$ , entonces sabemos de la teoría Estadística, que  $a_t - \psi_t$  tiene distribución Lognormal con media  $-\psi_t$  y varianza  $\theta^2(t)$ . Si transformamos estas variables  $a_t - \psi_t$ , aplicando sus logaritmos, las variables resultantes tienen una distribución normal. Así, precisamos determinar los parámetros de la distribución Normal desde los parámetros calculados de los caudales observados. Inicialmente obtenemos la varianza de los ruidos en términos del parámetro autoregresivo.

Como  $a_t$  tiene media cero:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a_t) &= E(a_t^2) \\ &= E \left[ \left( \frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m} \right) - \phi_m \left( \frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) \right]^2 \\ &= E \left[ \left( \frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m} \right)^2 \right] + \phi_m^2 E \left[ \left( \frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right)^2 \right] - 2\phi_m E \left[ \left( \frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m} \right) \left( \frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) \right] \\ &= \rho^m(0) + \phi_m^2 \rho^{m-1}(0) - 2\phi_m \rho^m(1) \\ &= 1 + \phi_m^2 - 2\phi_m^2 \\ &= 1 - \phi_m^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\theta^2(t) = 1 - \phi_m^2 \quad (\text{B.7})$$

Los caudales no pueden ser negativos, lo que implica un límite inferior para  $a_t, \psi_t$ . Definiremos  $\psi_t$  por el manejo de la ecuación (B.1).  $Z_t$  será positivo si:

$$a_t > -\frac{\mu_m}{\sigma_m} - \phi_m \left( \frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) = \psi_t \quad (\text{B.8})$$

Ahora vamos a deducir los parámetros de las distribuciones normales  $\log(a_t - \psi_t)$ , es decir, la media  $\mu_v$  y la varianza  $\sigma_v^2$ . Los valores de  $\mu_v$  y  $\sigma_v^2$  se pueden deducir por la función generadora de momentos de  $a_t - \psi_t$ . Por simplicidad de notación, dejaremos de lado el índice del tiempo  $t$ . También asumiremos el índice  $\lambda$  para simplificar la notación.

La función densidad de probabilidad de  $a_t$ , que tiene distribución Lognormal de 3 parámetros  $(\psi_t, \mu_v, \sigma_v)$  es:

$$f_{a_t} = \frac{1}{(a_t - \psi_t)\sqrt{2\pi\sigma_v}} e^{-0.5\left(\frac{\log(a_t - \psi_t) - \mu_v}{\sigma_v}\right)^2} \quad \text{para } a_t \geq \psi_t \quad (\text{B.9})$$

donde:

$$\mu_v = E(\log(a_t - \psi_t)) \quad (\text{B.10})$$

$$\sigma_v = \sqrt{E[\log(a_t - \psi_t) - \mu_v]^2} \quad (\text{B.11})$$

La función de probabilidad (B.9) tiene las siguientes estadísticas:

Media:

$$\mu_v = \psi_t + e^{\mu_v + \frac{\sigma_v^2}{2}} \quad (\text{B.12})$$

Varianza:

$$\theta^2 = e^{2(\mu_v + \sigma_v^2)} - e^{2\mu_v + \sigma_v^2} \quad (\text{B.13})$$

Llamando la variable auxiliar  $\lambda = e^{\sigma_v^2}$  trabajando con el segundo momento B.13, se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta^2 &= e^{2\mu_v} e^{\sigma_v^2} (e^{\sigma_v^2} - 1) \\ &= e^{2\mu_v} \lambda (\lambda - 1) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$e^{2\mu_v} = \frac{\theta^2}{\lambda(\lambda-1)}$$

Aplicando el logaritmo:

$$\mu_v = 0.5 \log \left( \frac{\theta^2}{\lambda(\lambda-1)} \right) \quad (\text{B.14})$$

y

$$\sigma_v^2 = \log(\lambda) \quad (\text{B.15})$$

A partir de los momentos de primer orden (B.12), de la distribución Lognormal, se tiene:

$$-\psi_t = e^{\mu_v + \frac{\sigma_v^2}{2}}$$

Aplicando logaritmo:

$$\log(-\psi_t) = \mu_v + \frac{\sigma_v^2}{2} \quad (\text{B.16})$$

Substituyendo (B.14) y (B.15) en el lado derecho de (B.16)

$$\begin{aligned} &= 0.5 \log\left(\frac{\theta^2}{\lambda(\lambda-1)}\right) + 0.5 \log \lambda \\ &= 0.5 \log \theta^2 - 0.5 \log(\lambda(\lambda-1)) + 0.5 \log \lambda \\ &= 0.5 \log \theta^2 - 0.5 \log \lambda - 0.5 \log(\lambda-1) + 0.5 \log \lambda \\ &= 0.5 \log\left(\frac{\theta^2}{\lambda-1}\right) \end{aligned}$$

Exponenciando ambos lados:

$$\begin{aligned} -\psi_t &= \sqrt{\frac{\theta^2}{\lambda-1}} \\ \psi_t^2 &= \frac{\theta^2}{\lambda-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{\theta^2}{\psi_t^2} + 1 \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo (B.17) en (B.14) y (B.15) obtenemos expresiones para  $\mu_v$  y  $\sigma_v^2$  en términos de la varianza y del límite inferior de los ruidos. Estas son utilizadas en la generación sintética de caudales.

Consideraremos ahora la dependencia explícita con  $t$ . La variable  $V_t = (\log(a_t - \psi_t) - \mu_v) / \sigma_v$  es llamada ruido transformado.

### B.2.2 Modelo de ajuste

El modelo de caudales permite la adopción de diferentes órdenes de regresión que se aplican a cada período. Box y Jenkins propusieron una metodología para el ajuste de modelos ARIMA de series temporales, que también se pueden aplicar a los modelos PAR( $p$ ). En este análisis, la selección del modelo se divide en tres partes.

El primer paso, llamado *identificación* del modelo, consiste en la selección de un orden inicial para el modelo, basado en los estimadores de las funciones autoregresivas obtenidas desde el histórico. El segundo paso es la *estimación* de los parámetros del modelo, y el tercer paso es llamado *verificación* del modelo, donde testes estadísticos son utilizados para comprobar si las hipótesis adoptadas por el teste anterior son adecuadas. Si esto no se verifica se debe retornar al primer paso, hasta que los resultados sean satisfactorios.

### B.2.3 Verificación del modelo

Se puede testar el modelo PAR(1) en cuanto a la independencia y normalización de las afluentes y por “outliers”.

#### B.2.3.1 Independencia de los ruidos

Esta hipótesis se puede comprobar por el cálculo de la autocorrelación estacional de los ruidos transformados, como:

$$r_v^{(m)}(j) = \frac{N^{-1}(\sum_{i=1}^N V_{(i-1)s+m} V_{(i-1)s+m-j})}{\sigma_v^{(m)} \sigma_v^{(m-j)}} \quad (\text{B.18})$$

Si el modelo fuera adecuado,  $r_v^{(m)}(j)$  tiene una distribución aproximadamente Normal con media cero y varianza menor que  $N^{-1}$ . Las estadísticas de Portmanteau,

$$Q_{m,L} = N \sum_{j=1}^L \left( r_v^{(m)}(j) \right)^2 + L(L+1)/2N \quad (\text{B.19})$$

son asintóticamente independientes y tienen una distribución  $\chi^2$  con  $(L-1)$  grados de libertad. Un valor (significativamente) alto de  $Q_{m,L}$  indica que la modelación del período  $m$  no es adecuada. En este caso, se debe intentar variar el orden del modelo (aumentando el orden desde 1) hasta que los ruidos sean independientes. En este proceso, se puede analizar las funciones de autocorrelación parciales de la muestra.

El modelo también deberá ser probado para todo el conjunto, usando la estadística:

$$Q_L = \sum_{m=1}^s Q_{m,L} \quad (\text{B.20})$$

donde  $Q_L$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $s(L-1)$  grados de libertad.

#### B.2.3.2 Ruidos normalizados

Esta hipótesis puede ser verificada a través del cálculo de la asimetría estacional:

$$\gamma_v^m = N^{-1} \sum_{i=1}^N (V_{(i-1)s+m})^3 \quad (\text{B.21})$$

Por tener el estimador de la asimetría una distribución aproximadamente normal, con media cero y varianza  $6N^{-1}$ , la hipótesis que la *distribución transformada* tiene una distribución

Normal es rechazada (con nivel de significancia  $\alpha$ ) siempre que  $|\gamma_v^m| > Z_{n_\alpha} \sqrt{6N^{-1}}$ , donde  $n_\alpha$  es el límite superior del intervalo de confianza para un  $\alpha$  dado, de una distribución Normal patrón.

#### B.2.3.3 Puntos fuera de la curva

El cálculo de la secuencia histórica  $\{V_1, V_2, \dots\}$  caracteriza como "sospechoso" cualquier valor  $Z_t$  que resulte en un valor  $V_t$  fuera del intervalo de confianza de 99% de una distribución Normal.

### B.3 Modelo multivariado para múltiples embalses

Sea:

$$V_t = [V_t(1), V_t(2), \dots, V_t(j)] \quad (B.22)$$

un conjunto de ruidos transformados espacialmente dependientes, donde  $V_t(1)$  corresponde a la primera estación hidrológica,  $V_t(2)$  la segunda, y así en adelante, para  $j$  estaciones.

El modelo espacial está representado por:

$$V_t = AW_t \quad (B.23)$$

donde  $W_t$  es un vector con  $j$  componentes, todos con distribución Normal estándar, e independientes entre sí. La matriz  $A$ , conocida como matriz de carga se calcula por la siguiente ecuación:

$$AA' = Cov(V_t) = \Sigma \quad (B.24)$$

donde  $A'$  es la transpuesta de  $A$  y  $Cov(V_t)$  es la matriz de covarianza de  $V_t$ , llamada  $\Sigma$ , la que se estima desde las observaciones simultáneas de  $V_t(1), V_t(2), \dots, V_t(j)$ .

Una manera de resolver (B.24) es por descomposición en autovectores de  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \Lambda \Lambda'$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal con los autovalores y  $X$  es una matriz de autovectores. Así,

$$A = \Lambda^{1/2}$$

### B.4 Generación sintética de caudales

La generación de caudales en un período cualquiera  $m$  se hace tomando una muestra, en cada tiempo  $t$ , con  $j$  variables dependientes de distribución Normal estándar, donde  $j$  es el número de plantas hidráulicas del estudio:  $\tilde{W}_t(1), \tilde{W}_t(2), \dots, \tilde{W}_t(j)$ .



El vector de ruidos transformado con dependencia espacial  $\tilde{V}_t = [\tilde{V}_t(1), \tilde{V}_t(2), \dots, \tilde{V}_t(J)]$  se calcula por la ecuación (B.23), es decir,  $\tilde{V}_t = A\tilde{W}_t$ . Cada ruido  $\tilde{V}_t(i), i = 1, \dots, J$  recibe una transformación específica para resultar en el ruido  $\tilde{a}_t(i)$  del modelo autoregresivo periódico.

$$\tilde{a}_t(i) = \exp(\tilde{V}_t(i) \times \tilde{\sigma}_v + \tilde{\mu}_v) + \tilde{\Psi}_t \quad (\text{B.25})$$

donde  $\tilde{\mu}_v, \tilde{\sigma}_v$  y  $\tilde{\Psi}_t$  están relacionados a los residuos sintéticos de la misma manera que  $\mu_v, \sigma_v$  y  $\Psi_t$  están a los ruidos reales (ecuaciones (B.14) y (B.15) y (B.8) respectivamente).

La variable normalizada para cada local satisface la ecuación autoregresiva específica de la variable local  $i$ :

$$\tilde{X}_t(i) = \varphi_m \tilde{X}_{t-1}(i) + \tilde{a}_t(i) \quad (\text{B.26})$$

El caudal sintético  $\tilde{Z}_t(i)$  satisface:

$$\tilde{Z}_t(i) = \tilde{X}_t(i) \sigma_m(i) + \mu_m(i) \quad (\text{B.27})$$

donde  $\mu_m(i)$  y  $\sigma_m(i)$  corresponden a la media y desviación estándar de la muestra de los caudales reales afluentes al embalse  $i$  en el período  $m$ .

En el programa SDDP, es necesario que sean simultáneamente generados un conjunto de caudales sintéticos. En la etapa de optimización, es necesario que estas secuencias tengan un límite inferior común en cada paso de tiempo. Estas secuencias se llamarán secuencias separadas de  $\tilde{Z}_t(t, k), k = 1, \dots, K$ .

En la práctica, debido a la naturaleza iterativa de los cálculos, se utiliza el siguiente procedimiento. En cada instante de tiempo se calcula:

$$\tilde{\Psi}_t(i, k) = -\frac{\mu_m(i)}{\sigma_m(i)} - \varphi_m(i) \frac{\tilde{Z}_{t-1}(i, k) - \mu_{m-1}(i)}{\sigma_{m-1}(i)}$$

El valor máximo de los límites inferiores calculados para las secuencias individuales es el límite inferior común. Matemáticamente, se hacía:

$$\tilde{\Psi}_t(i) = \max_{k=1}^K \tilde{\Psi}_t(i, k)$$

De esta manera se calculan los parámetros  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}_v$  y  $\tilde{\sigma}_v$  por:

$$\tilde{\lambda}(t, i, k) = 1 + \frac{1 - \varphi_m(i)^2}{\tilde{\Psi}_t(i, k)^2}$$

$$\tilde{\mu}_v(t, i, k) = 0.5 \log \frac{1 - \varphi_m(i)^2}{\tilde{\lambda}(t, i, k)(\tilde{\lambda}(t, i, k) - 1)}$$

$$\tilde{\sigma}_v(t, i, k) = \sqrt{\log \tilde{\lambda}(t, i, k)}$$

Finalmente se calculan los caudales sintéticos como:

$$\tilde{Z}_t(i, k) = \sigma_m(i) \left( \exp[\tilde{\mu}_v(t, i, k) + \tilde{\sigma}_v(t, i, k) \tilde{V}_t(i)] + \tilde{\Psi}_t(i, k) \right)$$

Es necesaria la existencia de un punto inicial, esto es un valor de  $\tilde{Z}_{t-1}$  para el primero instante de tiempo. En algunos casos, este valor puede ser conocido, como en el caso de la simulación de continuidad de una secuencia de caudales reales. Caso contrario, se puede asumir un valor arbitrario, por ejemplo  $\tilde{Z}_{t-1} = \mu_{m-1}$ .

## B.1 Representación de variables climáticas exógenas

Esta versión permite incorporar información climáticas exógenas, que pueden ser utilizadas para modelar, por ejemplo, la influencia de fenómenos climáticos como el El Niño en los caudales.

### B.1.1.1 Eligiendo el factor de ponderación

Utilizando la misma notación de la sección do B.2.1 y definiendo,  $M_{t,m}$  como una secuencia escalar de mediciones históricas para un determinado índice y  $\tilde{M}_m$  una previsión de este índice para el período  $m$ , podemos definir una secuencia de pesos,  $w_{t,m}$ , de tal manera que:

$$w_{t,m} = e^{-k|M_{t,m}-\tilde{M}_m|}$$

Donde  $k$  es un factor de ponderación arbitrado. El factor  $k$  define la velocidad de decaimiento, aumentando o disminuyendo el impacto de la variable climática en los parámetros del modelo de caudales. Un valor muy pequeño disminuye el impacto de la variable climática en el modelo, mientras que con un valor alto la tendencia es súper-ajustar los parámetros del modelo para las observaciones específicas relacionadas al índice climático, eliminando la influencia de los datos históricos adicionales en el modelo de caudales.

Idealmente, se debe evitar situaciones límites, es decir, es importante adoptar un factor que pondere de forma correcta la influencia de la variable climática y también preserve las propiedades estadísticas del histórico de caudales en los escenarios sintéticos que serán utilizados en el modelo SDDP. El valor *default* para el factor de ponderación es 1. Sin embargo, el usuario tiene la opción de elegir otros valores, permitiendo aumentar o reducir el efecto de fenómenos climáticos sobre los escenarios de caudales sintéticos generados para el modelo SDDP.

### B.1.2 Modelo de ajuste

El peso acumulado en cada etapa puede ser definido por:

$$W_m = \sum_t w_{t,m}$$

De esta forma las estadísticas básicas del histórico de caudales serían redefinidas de forma a considerar la ponderación definida:

$$\mu_m = \frac{\sum Z_{t,m} \cdot w_{t,m}}{W_m}$$

$$\sigma_m = \sqrt{\left( \frac{\sum (Z_{t,m} - \mu_m)^2 \cdot w_{t,m}}{W_m} \right)}$$

La serie estacionaria,  $x_t$ , se define de forma similar al modelo PAR(p) convencional, sin embargo, considera las estadísticas ponderadas:

$$x_{t,m} = \frac{Z_{t,m} - \mu_m}{\sigma_m}$$

El modelo para estimar los parámetros de los modelos PAR(p) para los aportes de caudales del SDDP tiene como base el método de mínimo cuadrados. De esta forma, para incorporar el efecto del fenómeno El Niño en la estimación de los coeficientes autoregresivos es necesario adoptar la metodología de mínimos cuadrados ponderados. La ecuación autoregresiva para la secuencia normalizada de la serie de orden L será dada por:

$$x_t = \sum_{l=1}^L \varphi_{m,l} x_{t-l} + a_t$$

Los coeficientes autoregresivos para cada etapa  $m$  se formulan, por meio da abordagem de mínimos quadrados ponderados, como um problema de minimización de la variancia de los residuos:

$$\arg_{\Phi} \text{Min } \theta^2(m)$$

Representando la variancia de forma ponderada, se puede escribir el problema de forma que:

$$\arg_{\Phi} \text{Min } \theta^2(m) = \text{Min} \sum_t \frac{w_{t,m} (x_{t,m} - \sum_{l=1}^{lmax} \varphi_{m,l} x_{t-l,m})^2}{W_m}$$

Después de calculados los coeficientes autoregresivos considerando el efecto de la variable climática, el procedimiento para generación de los aportes de caudales a través del modelo estocástico de generación de escenarios sintéticos del SDDP es identico al especificado en las secciones anteriores.